

CAŁKI NIEOZNACZONE cz.3.

Całkowanie funkcji niewymiernych.

CZEŚĆ I

a) Całkowanie funkcji niewymiernych, zawierających pierwiastek stopnia n z wyrażenia liniowego, tzn. $\sqrt[n]{x}$.

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną potęg zmiennej x o wykładnikach postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to wykonujemy podstawienie

$$\sqrt[n]{x} = t \Rightarrow x = t^N \Rightarrow dx = N \cdot t^{N-1} dt,$$

gdzie N oznacza wspólny mianownik ułamków postaci $\frac{m}{n}$.

PRZYKŁAD. a) Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Zakładamy, że $x > 0$. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennych $x^{1/2}$ i $x^{1/3}$, wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ jest 6, wobec tego podstawiamy $x = t^6, t \geq 0$ skąd otrzymujemy $dx = 6t^5 dt, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2$. Jest więc

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

b) Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-1}.$$

Zakładamy, że $x \geq 0$. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennych $x^{1/2}$ i x , wobec tego podstawiamy $\sqrt{x} = t, t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 \left(\quad \right)' \Rightarrow dx = 2t dt$. Teraz podstawiamy otrzymane zależności do całki i przeprowadzamy przekształcenia algebraiczne:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 - 1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = 2 \int \frac{(t^2 - 1 + 1) dt}{t^2 - 1} = 2 \int \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} - \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 2 \left(\int 1 dt - \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \right) = 2 \int 1 dt - 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \end{aligned}$$

Wynik pierwszej całki mamy od razu: $\int 1 dt = t + C$. Natomiast w drugiej całce mianownik wyrażenia podcałkowego należy rozłożyć na czynniki, a potem na ułamki proste:

$$\int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \int \left[\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right] dt.$$

Teraz wyznaczmy współczynniki A, B poznaną nam metodą i wrócimy do całki:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)}{(t-1)(t+1)} + \frac{B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{At + A + Bt - B}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t + A - B}{t^2 - 1}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t + A - B}{t^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -B-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Teraz wracamy do całki:

$$\int \left[\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right] dt = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} \right] dt = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} \right] dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + C = \frac{1}{2} [\ln|t-1| - \ln|t+1|] + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \sqrt{\left| \frac{t-1}{t+1} \right|} + C =$$

$$= \ln \sqrt{\left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right|} + C$$

Wynik końcowy jest następujący:

$$I = \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-1} = 2 \int \frac{1}{t-1} dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2t - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C$$

Zadania do przerobienia: 17.23, 17.26, 17.27.

b) Całkowanie funkcji niewymiernych, zawierających pierwiastek stopnia n z wyrażenia liniowego, tzn. $\sqrt[n]{ax+b}$ lub $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennej x oraz potęg dwumianu $ax+b$ lub funkcji homograficznej

$$\frac{ax+b}{cx+d}, \text{ gdzie } ad-bc \neq 0,$$

o wykładnikach postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to w pierwszym przypadku wykonujemy podstawienie

$$\sqrt[n]{xa+b} = t \Rightarrow xa+b = t^N \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t^N - b) \Rightarrow dx = \frac{1}{a} N \cdot t^{N-1} dt,$$

a w drugim przypadku

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^N \Rightarrow ax+b = t^N(cx+d) \Rightarrow ax+b = t^N \cdot cx + t^N \cdot d \Rightarrow$$

$$dx = \frac{(b-t^N \cdot d)'(t^N \cdot c - a) - (b-t^N \cdot d)(t^N \cdot c - a)'}{(t^N \cdot c - a)^2} dt$$

$$b - t^N \cdot d = t^N \cdot cx - ax \Rightarrow b - t^N \cdot d = (t^N \cdot c - a)x \Rightarrow x = \frac{b - t^N \cdot d}{(t^N \cdot c - a)}$$

$$dx = \frac{-Nt^{N-1} \cdot d(t^N \cdot c - a) - Nt^{N-1} \cdot c(b - t^N \cdot d)}{(t^N \cdot c - a)^2} dt$$

$$dx = \frac{-Nt^{2N-1} \cdot c \cdot d + Nt^{N-1} \cdot c \cdot a - Nt^{N-1} \cdot c \cdot b + Nt^{2N-1} \cdot c \cdot d}{(t^N \cdot c - a)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{Nt^{N-1} \cdot c \cdot (a - b)}{(t^N \cdot c - a)^2} dt$$

gdzie N oznacza mianownik ułamków postaci $\frac{m}{n}$.

PRZYKŁAD. Obliczyć całki:

a) $\int x\sqrt{2x-10}dx$.

Zakładamy, że $x \geq 5$. Podstawiamy $2x-10=t^2$, gdzie $t \geq 0$, skąd $2dx=2tdt$ a więc $dx=tdt$.

Prócz tego obliczamy x ze związku $2x-10=t^2$ i otrzymujemy $x = \frac{1}{2}(t^2 + 10)$. W ten sposób po podstawieniu całka przyjmie postać:

$$\int x\sqrt{2x-10}dx = \frac{1}{2} \int (t^2 + 10)t \cdot tdt = \frac{1}{2} \int (t^4 + 10t^2)dt = \frac{1}{2} \int t^4 dt + \frac{10}{2} \int t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} t^5 + 5 \cdot \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{10} \sqrt{(2x-10)^5} + \frac{5}{3} \sqrt{(2x-10)^3} + C$$

b) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$.

Zakładamy, że $x \neq 1, x \neq -1$. Podstawiamy

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow x+1 = t^3(x-1) \Rightarrow x+1 = t^3 \cdot x - t^3 \Rightarrow t^3 + 1 = t^3 \cdot x - x \Rightarrow t^3 + 1 = x(t^3 - 1),$$

$$\text{skąd } x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3 - 1)^2}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \int t \cdot \frac{\frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}}{\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1} = \int \frac{\frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}}{\frac{t^3+1+t^3-1}{t^3-1}} = \int \frac{\frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}}{\frac{2t^3}{t^3-1}} = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = -3 \int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

$$I = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = -3 \int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Teraz funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \frac{At^2 + At + A + Bt^2 + Ct - Bt - C}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t^2(A+B) + t(A-B+C) + (A-C)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} t^2 \\ t \\ t^0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2A+C=0 \\ A-C=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Po rozkładzie na ułamki proste mamy

$$I = \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt - \int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3} \ln(t^2+t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln|t-1| + C, \text{ gdzie } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Zadania do przerobienia: 17.6, 17.7, 17.10, 17.11, 17.15, 17.16, 17.17, 17.18, 17.22, 17.18, 17.22.

CZEŚĆ II

1. Całkę typu

$$(I) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}, \text{ gdzie } k \in R,$$

obliczamy według wzoru

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C. \quad (1)$$

Słuszność tego wzoru wynika natychmiast z definicji funkcji pierwotnej.

$$\text{PRZYKŁAD. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C.$$

2. Całkę typu

$$(II) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}}, \text{ gdzie } k \in R_+,$$

obliczamy według wzoru

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + C. \quad (2)$$

Słuszność tego wzoru wynika z definicji funkcji pierwotnej.

$$\text{PRZYKŁAD. } \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{25}} + C = \arcsin \frac{x}{5} + C.$$

3. Całkę typu

$$(III) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ gdzie } a, b, c \in R,$$

wyznaczamy w zależności od znaku współczynnika a przy x^2 . Najpierw sprowadzamy trójmian kwadratowy, znajdujący w mianowniku pod pierwiastkiem, do postaci kanonicznej wzorem:

$$ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]. \quad (3)$$

Następnie wprowadzamy podstawienie:

$$x + \frac{b}{2a} = t \Rightarrow dx = dt. \quad (4)$$

I tak:

a) Jeżeli $a > 0$, to wynik całki otrzymujemy według wzoru (1).

b) Jeżeli $a < 0$, to wynik całki otrzymujemy według wzoru (2).

PRZYKŁAD. a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 5}} \stackrel{\left| \begin{smallmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{smallmatrix} \right.}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 5} \right| + C = \ln \left| x+2 + \sqrt{(x+2)^2 + 5} \right| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} \stackrel{\left| \begin{smallmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{smallmatrix} \right.}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{9}} + C = \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$$

4. Całkę typu

$$\text{(IV)} \quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \text{ gdzie } M, N, a, b, c \in \mathbb{R},$$

wyznaczamy przedstawiając ją w postaci sumy algebraicznej dwu całek

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = A_1 \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (5)$$

Dowodzi się, że rozkład (5) jest zawsze możliwy i jednoznaczny. W liczniku pierwszej całki mamy pochodną mianownika i wynikiem tej całki będzie $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, natomiast w druga całka jest całką typu (III), mianownik której sprowadzamy do postaci kanonicznej wzorem (3), a wynik jest uzależniony od znaku współczynnika a przy x^2 . Rozkład jest zawsze możliwy i jednoznaczny. Niezależne współczynniki A_1, A_2 obliczamy dzieląc licznik $Mx+N$ przez pochodną mianownika

$$ax^2 + bx + c, \text{ tzn. } \frac{(Mx+N) \div (2ax+b) = A_1}{\text{reszta} = A_2}.$$

Iloraz z dzielenia daje nam współczynnik A_1 , natomiast reszta, która zostaje z dzielenia jest współczynnikiem A_2 .

PRZYKŁAD. a)

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x-5)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} &= A_1 \int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} \stackrel{\left| \begin{smallmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{smallmatrix} \right.}{=} 2 \int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} - 13 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \\ &= 2\sqrt{x^2+4x+9} - 13 \ln \left| t + \sqrt{t^2+5} \right| + C = 2\sqrt{x^2+4x+9} - 13 \ln \left| x+2 + \sqrt{(x+2)^2+5} \right| + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} &= A_1 \int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} \stackrel{\left| \begin{smallmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{smallmatrix} \right.}{=} -3 \cdot 2\sqrt{5-4x-x^2} - 11 \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \\ &= -6\sqrt{5-4x-x^2} - 11 \arcsin \frac{t}{\sqrt{9}} + C = -6\sqrt{5-4x-x^2} - 11 \cdot \arcsin \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

5. Całkę typu

$$\text{(V)} \quad I_1 = \int \sqrt{x^2+k} dx, \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(k+x^2)}} \text{ gdzie } k \in \mathbb{R},$$

noszą nazwę *całek stowarzyszonych*, ponieważ przy obliczeniu całki I_1 pojawia się całka I_2 i na odwrót. Aby znaleźć całki stowarzyszone typu (V), do całki I_1 stosujemy wzór na całkowanie przez części: Mamy wtedy:

$$\int \sqrt{x^2+k} dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2+k}, \quad g'(x) = 1, \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+k}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+k}}, \quad g(x) = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+k}} \quad (6)$$

Jeżeli całkę z prawej strony wzoru (6) przeniesiemy na lewą stronę, to otrzymamy:

$$\int \sqrt{x^2 + k} dx + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + k}} = x\sqrt{x^2 + k}. \quad (7)$$

Równość (7) daje nam wzór na sumę szukanych całek stowarzyszonych I_1 i I_2 . Biorąc różnicę szukanych całek otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + k} dx - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + k}} &= \int \left(\sqrt{x^2 + k} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + k}} \right) dx = \int \frac{\left(\sqrt{(x^2 + k)^2} - x^2 \right) dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \\ &= \int \frac{(x^2 + k - x^2) dx}{\sqrt{x^2 + k}} = k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ale zgodnie z wzorem (1) mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

Uwzględniając ten wzór (1) w prawej stronie (8) mamy:

$$\int \sqrt{x^2 + k} dx - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + k}} = k \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C. \quad (9)$$

Równość (7) daje nam wzór na różnicę szukanych całek stowarzyszonych I_1 i I_2 . Dodając i odejmując stronami (5) i (6) otrzymujemy

$$I_1 \equiv \int \sqrt{x^2 + k} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + k} + \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C, \quad (10)$$

$$I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + k} - \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C. \quad (11)$$

W sposób zupełnie analogiczny wyznaczamy całki stowarzyszone

$$I_1 = \int \sqrt{k - x^2} dx, \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(k - x^2)}}, \quad \text{gdzie } k \in R_+.$$

$$I_1 \equiv \int \sqrt{k - x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{k - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad (12)$$

$$I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{k - x^2}} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{k - x^2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + C. \quad (13)$$

PRZYKŁAD.

$$\text{a) } \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4} dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 + 4} + \ln|t + \sqrt{t^2 + 4}| + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x+1)\sqrt{(x+1)^2 + 4} + \ln|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 4}| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 9} - \ln|x + \sqrt{x^2 + 9}| + C,$$

$$\text{c) } \int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{1}} + C = \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + C,$$

$$\text{d) } I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{2 + 4x - x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{6 - (x-2)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} (x-2)\sqrt{6 - (x-2)^2} + \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C$$

6. Całkę typu

$$(VI) \quad I = \int \frac{W_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie W_n jest wielomianem stopnia $n \geq 1$ naturalne, wyznaczamy przedstawiając ją w postaci

$$\int \frac{W_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = W_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + B \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (12)$$

Dowodzi się, że rozkład (10) jest zawsze możliwy i jednoznaczny, tj. istnieje dla danego wielomianu W_n dokładnie jeden taki układ liczb rzeczywistych B oraz współczynników tego wielomianu, że dla x należących do dziedziny funkcji podcałkowej zachodzi rozkład (10). Niezależne współczynniki wielomianu W_{n-1} oraz B , występujące po prawej stronie obliczamy metodą współczynników nieoznaczonych.

PRZYKŁAD.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= (A_2x^2 + A_1x + A_0)\sqrt{x^2+2x-1} + B \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx; \\ \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} &= (2A_2x + A_1)\sqrt{x^2+2x-1} + (A_2x^2 + A_1x + A_0) \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} + B \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}; \\ x^3+2x^2+x-1 &= (2A_2x + A_1)(x^2+2x-1) + (A_2x^2 + A_1x + A_0)(x+1) + B; \\ x^3+2x^2+x-1 &= 3A_2x^3 + (5A_2+2A_1)x^2 + (-2A_2+3A_1+A_0)x + (-A_1+A_0+B); \\ A_2 &= \frac{1}{3}; \quad A_1 = \frac{1}{6}; \quad A_0 = \frac{7}{6}; \quad B = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1} - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx; \\ \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1} - 2 \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-2}} dx; \\ \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1} - 2 \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}| + C. \end{aligned}$$

7. Całkę typu

$$(VII) \quad I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wyznaczamy przez sprowadzenie jej do całki typu (III) lub do całki typu (II). Osiągamy to stosując podstawienie $x-\alpha = \frac{1}{t}$.

PRZYKŁAD

$$I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}} = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^3} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \sqrt{t^2 + 1} - \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right| + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C$$

8. Całkę typu

$$(VIII) \quad I = \int \frac{W_n(x) dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad k, n \in \mathbb{N} \text{ i } k \geq n+1,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n , wyznaczamy przez sprowadzenie jej do całki typu (VI).

Osiągamy to stosując podstawienie $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

PRZYKŁAD .

Zadania do przerobienia: 17.23, 17.26, 17.27.