FUNKCJE DWU I WIELU ZMIENNYCH.

1. Pojęcie funkcji dwu i wielu zmiennych.

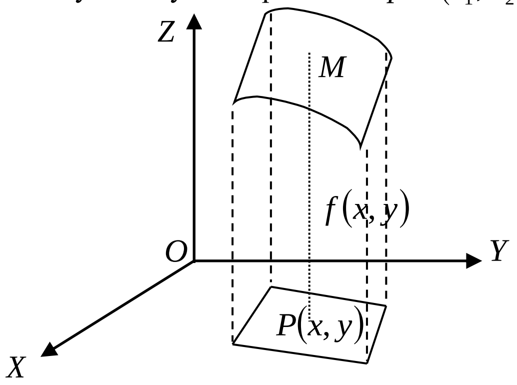
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz F oznaczają dane zbiory. Jeżeli każdemu elementowi (punktowi) $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ należącemu do pewnego zbioru $A \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ przyporządkujemy jednoznacznie element $z \in F$, to mówimy, że w A została określona *funkcja* n*- zmiennych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i zapisujemy to w następujący sposób

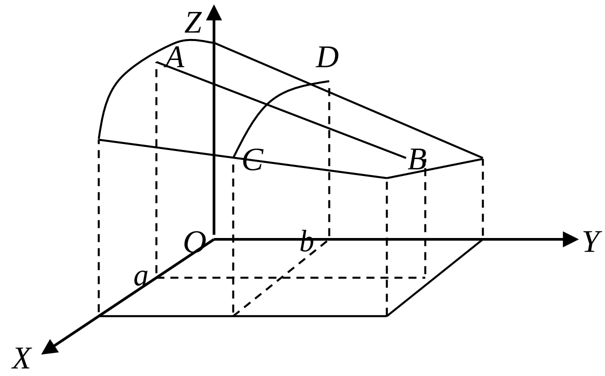
$$f : A \to F \text{ gdzie } A \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \tag{1}$$

Zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy *zmiennymi niezależnymi*. Element $z \in F$ przyporządkowany elementowi $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywamy *wartością funkcji* f *w punkcie* $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i oznaczamy przez $f(\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$ lub krótko $f(p)$. Zbiór A nazywamy *dziedziną* lun polem funkcji f, zbiór F *- zbiorem wartości* funkcji f.

Dla $n = 2$ otrzymujemy funkcje dwu zmiennych niezależnych x_1 i x_2, które najczęściej oznaczać będziemy przez x i y. W tym przypadku $f(x, y)$ lub krótko $f(p)$ gdzie $p = (x, y)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie $p \in X \times Y$.

Jeżeli f jest funkcją określoną pewnym wzorem i nie mamy przy tym dodatkowych założeń, to przez dziedzinę (pole) funkcji f n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumieć będziemy zbiór tych wszystkich punktów $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dla których wzór określający funkcję ma sens.





Związek

$$z = f(x, y), \text{ gdzie } (x, y) \in A \tag{2}$$

nazywamy *równaniem powierzchni* S.

Jeżeli w równaniu (2) nadamy zmiennej x stałą wartość a, to otrzymamy funkcje jednej zmiennej y

$$z = f(a, y) \tag{3}$$

Geometrycznie równanie $x = a$ przedstawia płaszczyznę prostopadłą do osi Ox.

Wykresem funkcji jednej zmiennej (3) jest linia AB, wzdłuż której płaszczyzna o równaniu $x = a$ przecina powierzchnię o równaniu $z = f(x, y)$. Podobnie, gdy w (2) nadamy zmiennej y stałą wartość b, to otrzymamy funkcje jednej zmiennej x

$$z = f(x, b) \tag{4}$$

której wykresem jest linia CD, wzdłuż której płaszczyzna o równaniu $y = b$ przecina powierzchnię o równaniu $z = f(x, y)$.

PRZYKŁAD. Wyznaczyć dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}.$$

ROZWIAZANIE. Zgodnie z definicja dziedziny funkcji, wzór określający naszą funkcję będzie miał sens, gdy

$$4-\left(x^2+y^2\right)\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 0 .$$

Jest to domknięte koło o środku w początku układu i promieniu 2.

2. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych.

Przestrzenią euklidesową p *- wymiarową* ($p \in N$) nazywamy zbór wszystkich ciągów p *- wyrazowych* $\left(a_{1,} a_2, \ldots, a_p\right)$, których elementy a_i są liczbami rzeczywistymi. Elementy a_i tych ciągów , dla odróżnienia od elementów przestrzeni euklidesowej będziemy nazywać współrzędnymi, a same ciągi elementami, wektorami lub punktami przestrzeni euklidesowej.

Odległość dwóch punktów $a=\left(a_{1,} a_2, \ldots, a_p\right),\ b=\left(b_{1,} b_2, \ldots, b_p\right)$ w przestrzeni euklidesowej określać będziemy tak

$$d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(a_i-b_i\right)^2}$$

Niech mamy ciąg punktów $\left(p_n\right)$ przestrzeni euklidesowej E^k i niech $p_n=\left(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\right)$ dla $n \in N$. Na podstawie definicji przestrzeni euklidesowej i zbieżności ciągu mamy następujące twierdzenie

<u>Tw.</u> Ciąg $\left(p_n\right)$ jest zbieżny do punktu $p_0=\left(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0}\right) \in E^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall 1 \leq i \leq k : \lim_{n\to\infty} x_{in}=x_{i0} \tag{4}$$

<u>Def.</u>*(Heinego granicy funkcji)*

Liczbę g nazywamy *granicą funkcji* f w punkcie p_0, jeżeli

$$\forall\left(p_n\right) \forall n \in N \left(p_n \in A \wedge p_n \neq p_0 \wedge \lim_{n\to\infty} p_n=p_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f\left(p_n\right)=g\right)$$

co zapisujemy

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=g \tag{5}$$

Definicja Heinego granicy funkcji wielu zmiennych nie różni się istotnie od definicji granicy funkcji jednej zmiennej. Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej formułujemy definicję Cauchy'ego granicy funkcji wielu zmiennych.

<u>Def.</u>*(Cauchy'ego granicy funkcji)*

Liczbę g nazywamy *granicą funkcji* f w punkcie p_0, jeżeli

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall p \in A\ \left(0<d\left(p, p_0\right)<\delta\right) \Rightarrow \left(\left|f(p)-f\left(p_0\right)\right|<\varepsilon\right).$$

Definicje granic niewłaściwych funkcji wielu zmiennych w punkcie p_0:

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=-\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{p\to p_0} f(p)=+\infty$$

są również analogiczne do podanych wcześniej.

PRZYKŁAD. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}.$$

ROZWIAZANIE. Przyjmijmy, że

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}.$$

Niech ciąg (x_n,y_n) będzie dowolnym ciągiem punktów dążących do punktu $(0,2)$ o wyrazach należących do dziedziny funkcji $(x_n,y_n)\to(0,2)$. Przyjmijmy następnie że $\rho_n=\sqrt{(x_n-0)^2+(y_n-2)^2}$. Dane podstawienie wkładamy do funkcji wyjściowej. Wtedy otrzymamy

$$f(x_n,y_n)=\frac{\sqrt{\rho_n^2+1}-1}{\rho_n^2}, \text{ oraz } \rho_n\to 0 \text{ gdy } x_n\to 0 \text{ i } y_n\to 2.$$

W ten sposób otrzymaliśmy funkcję jednej zmiennej. Wystarczy więc znaleźć granicę

$$I=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{\sqrt{\rho_n^2+1}-1}{\rho_n^2}=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{\left(\sqrt{\rho_n^2+1}-1\right)\left(\sqrt{\rho_n^2+1}+1\right)}{\rho_n^2\left(\sqrt{\rho_n^2+1}+1\right)}=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{\sqrt{\left(\rho_n^2+1\right)}^2-1^2}{\rho_n^2\left(\sqrt{\rho_n^2+1}+1\right)}=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{\rho_n^2+1-1}{\rho_n^2\left(\sqrt{\rho_n^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{\rho_n^2}{\rho_n^2\left(\sqrt{\rho_n^2+1}+1\right)}=\lim_{\rho_n\to 0}\frac{1}{\sqrt{\rho_n^2+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

PRZYKŁAD. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Nie ma granicy w punkcie $p_0=(0,0)$.

ROZWIAZANIE. Niech $p_n=(x_n,y_n)$ będzie ciągiem punktów dążących do punktu p_0 wzdłuż prostej o równaniu $y=mx$. Oczywiście $x_n\neq 0$, $y_n\neq 0$. Współrzędne (x_n,y_n) spełniają równanie tej prostej i mamy $y_n=mx_n$. Podstawiając x_n, y_n do funkcji wyjściowej mamy

$$f(x_n,y_n)=\frac{{x_n}^2-{y_n}^2}{{x_n}^2+{y_n}^2}=\frac{{x_n}^2-m^2{x_n}^2}{{x_n}^2+m^2{x_n}^2}=\frac{{x_n}^2\left(1-m^2\right)}{{x_n}^2\left(1+m^2\right)}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Z ostatniej równości wynika, że funkcja ma wartość stałą, gdy punkt p_n dąży do punktu p_0 wzdłuż prostej o równaniu $y=mx$. Wobec tego

$$\lim_{wzdłuż=mx} f(x,y)=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Z ostatniej równości wynika, że funkcja f nie ma w punkcie p_0 granicy, ponieważ przy wyborze różnych prostych $y=mx$.

Z powyższego przykładu widać, że przy wyznaczeniu granicy funkcji wielu zmiennych konieczna jest szczególna ostrożność, ponieważ każdy ciąg (p_n) występujący w definicji Heinego jest określony przez k ciągów liczbowych (x_{in}), $i=1,2,\dots,k$, które mogą dążyć do swych wartości granicznych x_{i0} w dowolny sposób, co może utrudnić wyznaczenie granicy.

<u>**Tw.**</u> Jeżeli funkcje $f,\varphi:R^k\supset A\to R$ mają w punkcie p_0 odpowiednio granice g_1 i g_2, to

1. $\lim\limits_{p\to p_0}\left[f(p)\pm\varphi(p)\right]=g_1\pm g_2$,
2. $\lim\limits_{p\to p_0}\left[f(p)\cdot\varphi(p)\right]=g_1\cdot g_2$,

3. $\lim\limits_{p \to p_0} \dfrac{f(p)}{\varphi(p)} = \dfrac{g_1}{g_2}$, gdy $g_2 \neq 0$, $\forall p \in A : \varphi(p) \neq 0$.

Załóżmy, że funkcja $f : R^k \supset A \to R$ i niech $p_0 \in A$.

Def._(Heinego ciągłości funkcji)_
Funkcję f nazywamy _ciągłą w punkcie_ p_0, jeżeli dla każdego ciągu (p_n) o wyrazach należących do A i zbieżnego do p_0 ciąg $\{f(p_n)\}$ jest zbieżny do $f(p_0)$

$$\forall (p_n)\, \forall n \in N \left(p_n \in A \wedge \lim_{n\to\infty} p_n = p_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)\right).$$

Def._(Cauchy'ego ciągłości funkcji)_
Funkcję f nazywamy _ciągłą w punkcie_ p_0, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall p \in A \left(0 < d(p, p_0) < \delta\right) \Rightarrow \left(\left|f(p) - f(p_0)\right| < \varepsilon\right).$$

Tw. Jeżeli funkcje $f, \varphi : R^k \supset A \to R$ są ciągłe w punkcie p_0 to suma, różnica i iloczyn tych funkcji są funkcjami ciągłymi w tym punkcie. Iloraz jest funkcją ciągłą przy dodatkowym założeniu, że dzielenie jest wykonalne.

3. Granice iterowane.

Niech $X \subset E$ i $Y \subset E$ będą dwoma dowolnymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej, oraz niech funkcja f będzie określona na iloczynie kartezjańskim $A : X \times Y$ i niech x_0 i y_0 będą punktami skupienia zbiorów X i Y.

Załóżmy, że przy dowolnym ustalonym $y \in Y$ istnieje granica funkcji f (która jest teraz funkcją tylko jednej zmiennej x) przy $x \to x_0$; granica ta zależy oczywiście od z góry ustalonego y, mamy więc

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y) \text{ dla } y \in Y. \tag{6}$$

Jeżeli przy $y \to y_0$ istnieje granica funkcji φ określonej wzorem (6), to granicę tę nazywamy _granicą iterowaną_ funkcji f w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy symbolem $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, czyli

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{7}$$

Załóżmy teraz, że przy dowolnym ustalonym $x \in X$ istnieje granica funkcji f (która jest funkcją tylko jednej zmiennej y) przy $y \to y_0$; granica ta zależy oczywiście od z góry ustalonego x, mamy więc

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \phi(x) \text{ dla } x \in X. \tag{6}$$

Jeżeli przy $x \to x_0$ istnieje granica funkcji ϕ określonej wzorem (6), to granicę tę nazywamy _granicą iterowaną_ funkcji f w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, czyli

$$\lim_{x \to x_0} \phi(y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \tag{7}$$

Z powyższych rozumowań wynika, że funkcja f dwu zmiennych niezależnych x i y może mieć dwie granice iterowane, które różnią się kolejnością przejścia do granicy.

PRZYKŁAD. Znaleźć granicę iterowane funkcji

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y}.$$

w punkcie $p_0=(0,0)$.

ROZWIAZANIE. Dla ustalonego $y\neq 0$ mamy

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y}=y-1.$$

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y}=\lim_{y\to 0}(y-1)=-1.$$

Teraz dla ustalonego $x\neq 0$ mamy

$$\phi(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y}=x+1.$$

$$\lim_{x\to 0}\phi(y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Z tego wynika, że dana funkcja ma granice iterowane i są różne.

PRZYKŁAD. Znaleźć granicę iterowane funkcji

$$f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y},\ (x,y)\in A=\{(x,y):x+y\neq 0\}.$$

w punkcie $p_0=(0,0)$.

ROZWIAZANIE. Dla ustalonego $y\neq 0$ mamy

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}=1.$$

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}=\lim_{y\to 0}1=1.$$

Teraz dla ustalonego $x\neq 0$ mamy

$$\phi(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}=\sin\frac{1}{x}.$$

Z ostatniej równości wynika, że dana granica iterowana nie istnieje.

$$\lim_{x\to 0}\phi(y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ \text{nie istnieje}$$

Z tego wynika, że dana funkcja ma tylko jedną granicę iterowaną.

<u>Tw.</u> Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. istnieje granica (właściwa lub nie) funkcji f dwu zmiennych x i y, gdy $(x,y)\to(x_0,y_0)$, czyli

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A, \qquad (8)$$

2. istnieje przy dowolnym ustalonym $y \in Y$ granica $\varphi(y)$ (skończona) funkcji f przy $x \to x_0$, czyli

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y), \tag{9}$$

to istnieje również granica iterowana

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{10}$$

i jest równa granicy (8).

3. Pochodne cząstkowe.

Niech $z = f(x, y)$ będzie funkcją określoną w obszarze D przestrzeni Euklidesowej E^2 i niech punkt $(x_0, y_0) \in D$.

Pochodną cząstkową funkcji f *względem zmiennej* x w punkcie (x_0, y_0) nazywamy zwykłą pochodną tej funkcji względem x w punkcie x_0 przy założeniu, że zmienna y ma wartość stałą y_0. Oznaczamy tę pochodną jednym z następujących symboli

$$f'_x(x_0, y_0), \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \ z'_x(x_0, y_0), \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Innymi słowy, pochodna cząstkowa funkcji f względem zmiennej x w punkcie (x_0, y_0) jest określona wzorem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0), \tag{11}$$

o ile granica po lewej stronie (11) istnieje.

Pochodną cząstkową funkcji f *względem zmiennej* y w punkcie (x_0, y_0) nazywamy zwykłą pochodną tej funkcji względem y w punkcie y_0 przy założeniu, że zmienna x ma wartość stałą x_0. Oznaczamy tę pochodną jednym z następujących symboli

$$f'_y(x_0, y_0), \ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \ z'_y(x_0, y_0), \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Innymi słowy, pochodna cząstkowa funkcji f względem zmiennej y w punkcie (x_0, y_0) jest określona wzorem

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0) \tag{12}$$

o ile granica po lewej stronie (12) istnieje.

Ogólnie, niech f będzie funkcją n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, określoną w pewnym obszarze V przestrzeni E^n i niech punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in V$. *Pochodna cząstkową funkcji* f *względem zmiennej* $x_i (i = 1, \ldots, n)$ w punkcie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nazywamy zwykłą pochodną tej funkcji względem x_i w punkcie x_i^0 przy założeniu, że pozostałe zmienne są stałe.

Jeżeli funkcja f dwu zmiennych x i y ma pochodne cząstkowe f'_x i f'_y w każdym punkcie pewnego obszaru D, to te pochodne są znowu funkcjami dwu zmiennych x i y. Można je więc dalej różniczkować względem zmiennej x bądź zmiennej y (o ile jest to możliwe) i otrzymujemy pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Oznaczamy je symbolami :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ lub } f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ lub } f''_{yy}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ lub } f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ lub } f''_{xy}. \tag{14}$$

Jest ich jak widać cztery.

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego f''_{yx}, f''_{xy} różniące się tylko kolejnością różniczkowania, nazywamy pochodnymi mieszanymi rzędu drugiego.

PRZYKŁAD. Znaleźć pierwsze i drugie pochodne funkcji

$$f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2,$$

ROZWIAZANIE. W celu wyznaczenia pochodnej f'_x różniczkujemy funkcję wyjściową względem x przy założeniu, że zmienna y jest stała:

$$f'_x(x,y)=4x^3-8xy^2.$$

Różniczkując funkcję f względem y przy założeniu, że zmienna x jest stała:

$$f'_y(x,y)=4y^3-8x^2y.$$

Aby otrzymać pochodne f''_{xx} i f''_{yy} różniczkujemy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego z funkcji f względem x i względem y:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-8y^2 \text{ i } f''_{yy}(x,y)=12y^2-8x^2.$$

Różniczkując funkcję f względem y przy założeniu, że zmienna x jest stała i na odwrót otrzymamy

$$f''_{xy}(x,y)=-16xy \text{ i } f''_{yx}(x,y)=-16xy \Rightarrow f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Tw. *(Schwarza o pochodnych mieszanych)*
Jeżeli pochodne mieszane f''_{xy} i f''_{yx} istnieją i są one ciągłe w punkcie $p=(x,y)$, to są one równe.

Dane twierdzenie pozostaje prawdziwe i dla pochodnych cząstkowych wyższych rzędów.

4. Różniczka zupełna funkcji.

Niech f będzie funkcją dwu zmiennych niezależnych x i y określoną i mającą pierwszą pochodne cząstkowe na pewnym otoczeniu $O(P_0,r)$ punktu $P_0(x_0,y_0)$. Niech dalej punkt $P_1(x_0+dx,y_0+dy)$, gdzie dx i dy są dowolnymi przyrostami zmiennych niezależnych $x,y\in O(P_0,r)$.

Przyrostem Δf funkcji f pomiędzy punktami $P_0(x_0,y_0)$ i $P_1(x_0+dx,y_0+dy)$ nazywać będziemy różnicę określoną wzorem:

$$\Delta f = f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0). \tag{15}$$

Różniczką zupełną df funkcji f w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ dla przyrostów dx i dy nazywać będziemy wyrażenie:

$$df = f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy. \tag{16}$$

Tw. Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu $O(P_0,r)$ punktu $P_0(x_0,y_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego oraz punkt $P_1(x_0+dx,y_0+dy)$ należy do tego otoczenia, to istnieje granica

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\Delta f-df}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}=0. \tag{17}$$

Dla małych przyrostów dx i dy zmiennych niezależnych x i y różniczka zupełna df funkcji f daje nam przybliżenie pewnego przyrostu Δf tej funkcji, tzn. $df\approx\Delta f$. Praktyczne znaczenie tego wzoru polega na wykorzystaniu go do oceny błędów i obliczeń przybliżonych wartości funkcji. Wtedy najlepiej skorzystać z takiej postaci tego wzoru

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy. \tag{18}$$

PRZYKŁAD. Obliczyć przyrost i różniczkę zupełną funkcji

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y},$$

dla $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}02$.

ROZWIAZANIE. Korzystamy z wzoru (15) dla obliczenia przyrostu Δf funkcji f pomiędzy punktami $P_0(1{,}3)$ i $P_1(1+0{,}01{,}3+0{,}02)$:

$$f(1{,}3)=-2;\ f(1{,}01;3{,}02)=-\frac{403}{201},\ \Delta f = f(1{,}01;3{,}02)-f(1{,}3)=-\frac{403}{201}+2=-0{,}004975.$$

Aby obliczyć różniczkę zupełną funkcji f w punkcie $P_0(1{,}3)$ dla przyrostów $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}02$ stosujemy wzór (16). Kolejno otrzymujemy:

$$f_x'(x,y)=\frac{-2y}{(x-y)^2},\ f_x'(1{,}3)=-\frac{3}{2},\ f_y'(x,y)=\frac{2x}{(x-y)^2},\ f_y'(1{,}3)=\frac{1}{2}.$$

$$df = f_x'(1{,}3)dx + f_y'(1{,}3)dy = -\frac{3}{2}\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02 = -0{,}005.$$

5. Pochodne cząstkowe funkcji złożonej.

Niech funkcja

$$z = f(u,v) \tag{19}$$

będzie określona na pewnym obszarze $G \subset R^2$ oraz niech dwie funkcje:

$$u=\varphi(x,y),\ v=\phi(x,y) \tag{20}$$

będą określone w pewnym wspólnym obszarze $D \subset R^2$. Jeżeli dla każdego $(x,y)\in D$ $(\varphi(x,y),\phi(x,y))=(u,v)\in G$, to funkcję

$$z = f(\varphi(x,y),\phi(x,y)) \tag{21}$$

nazywamy *funkcją złożoną zmiennych* x i y w obszarze $D \subset R^2$.

<u>**Tw.**</u> Jeżeli funkcja $z = f(u,v)$ ma w obszarze $G \subset R^2$ ciągłe pochodne cząstkowe f_u' i f_v' oraz funkcje $u=\varphi(x,y)$ i $v=\phi(x,y)$ mają w obszarze $D \subset R^2$ pochodne cząstkowe względem zmiennych x i y, to funkcja złożona (21) ma w obszarze D również pochodne cząstkowe względem zmiennych x i y określone wzorami

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{22}$$

Wniosek. Jeżeli funkcje u i v zależą tylko od zmiennej x, czyli $u=\varphi(x)$ i $v=\phi(x)$, to funkcja złożona $z = f(u,v)$ zależy tylko od zmiennej x, czyli $z = f(\varphi(x),\phi(x))$. W tym przypadku pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ są zwykłymi pochodnymi.

W szczególności, gdy $u = x$ i $v = y(x)$, to funkcja $z = f(x, y(x))$ ma pochodną

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y' \tag{23}$$

PRZYKŁAD. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji złożonej $f(u,v)=u^2\sin v$, gdzie $u=5x+2y$, $v=\sqrt{x^2+y^2}$.

ROZWIAZANIE. W rozważanym przykładzie mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=2u\sin v\,,\ \frac{\partial f}{\partial v}=u^2\cos v\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}=5\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Ostatecznie mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=10u\sin v+u^2\cos v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=10(5x+2y)\sin\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y(5x+2y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4u\sin v+u^2\cos v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=4(5x+2y)\sin\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y(5x+2y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

6. Pochodna w kierunku.

Niech p oznacza półoś o równaniach

$$x=x_0+t\cos\alpha\,,\ y=y_0+t\cos\beta \tag{24}$$

gdzie $t\geq 0$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$. Półoś p o równaniach (24) ma początek w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ i tworzy z osiami Ox i Oy odpowiednio kąty α i β.

Def. *Pochodną cząstkową funkcji* f dwu zmiennych x i y w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ w kierunku półosi p nazywamy granicę prawostronną w zerze (o ile istnieje) ilorazu

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t},$$

którą będziemy oznaczać symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}\,. \tag{25}$$

Tw. Jeżeli $A\subset R^2$ i funkcja $f:A\to R$ ma w otoczeniu $O(P_0,\delta)\subset A$ punktu $P_0(x_0,y_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial p}$ istnieje w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ i jest określona wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\equiv f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta\,.$$

Analogicznie określamy *pochodną cząstkową funkcji* f trzech zmiennych x, y i z w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ w kierunku półosi p, danej równaniami

$$x=x_0+t\cos\alpha\,,\ y=y_0+t\cos\beta\,,\ z=z_0+t\cos\gamma \tag{26}$$

nazywamy granicę prawostronną w zerze (o ile istnieje) ilorazu

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t},$$

którą będziemy oznaczać symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\,. \tag{27}$$

Tw. Jeżeli $A \subset R^3$ i funkcja $f : A \to R$ ma w otoczeniu $O(P_0, \delta) \subset A$ punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial p}$ istnieje w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i jest określona wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \equiv f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

PRZYKŁAD. Obliczyć pochodną cząstkową funkcji $f(x, y) = x^3 - y$, w punkcie $P_0(1,2)$ w kierunku półosi p, danej równaniami $x = 1 + t\cos\frac{\pi}{4}$, $y = 2 + t\cos\frac{\pi}{4}$, $t \geq 0$

ROZWIAZANIE. W rozważanym przykładzie mamy

$$f(x, y) = x^3 - y,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$$

Obliczamy

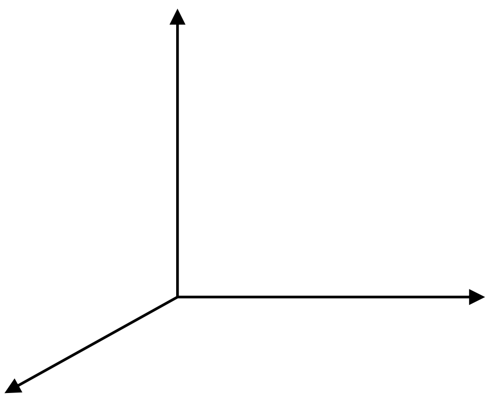
$$\frac{\partial f}{\partial p} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta = f'_x(1,2)\cos\frac{\pi}{4} + f'_y(1,2)\cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

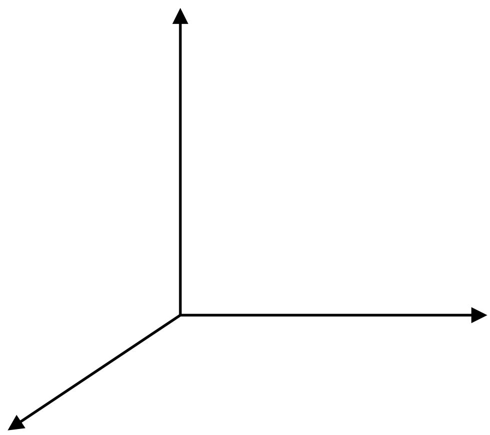
7. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.

Niech mamy funkcje $f : R^2 \supset D \to R$ i niech punkt $P_0(x_0, y_0) \in D$.

Def. Funkcja f ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu $O(P_0, r) \subset D$ punktu P_0, że $f(P_0) \geq f(P)$, dla $P \in O(P_0, r)$.

Def. Funkcja f ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ minimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu $O(P_0, r) \subset D$ punktu P_0, że $f(P_0) \leq f(P)$, dla $P \in O(P_0, r)$.





Maksima i minima lokalne noszą wspólną nazwę ekstremów lokalnych.

Tw. *(warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego).*
Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji f, mającej pierwsze pochodne cząstkowe f'_x i f'_y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ jest

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ i } f'_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (28)$$

Warunek konieczny nie jest jednak warunkiem wystarczającym. Można podać przykład funkcji, której pochodne cząstkowe znikają w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, a która nie ma ekstremum w tym punkcie: funkcja $z = xy$ ma pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \ \frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

które znikają w punkcie $P_0(0,0)$. Wartość tej funkcji w tym punkcie jest równa 0. W punkcie $P_0(0,0)$ rozważana funkcja nie ma jednak ekstremum, ponieważ jest dodatnia dla punktów I i II ćwiartki i ujemna dla II i IV ćwiartki.

Z powyższego twierdzenia wynika, że ekstrema lokalne funkcji mającej pierwsze pochodne cząstkowe mogą wystąpić (ale nie muszą) tylko w tych punktach, które są rozwiązaniami układu (28). Jeżeli dany układ nie ma rozwiązań, to funkcja nie ma ekstremów lokalnych.

Def. *Wyróżnikiem* funkcji $f : R^2 \supset A$ klasy C^2 na A nazywamy wyrażenie określone wzorem:

$$W(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2 \text{ dla } x, y \in A \tag{29}$$

Tw. *(warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego).*
Jeżeli $A \subset R^2$ i funkcja $f : A \to R$ jest klasy C^2 na A, punkt $P_0(x_0, y_0) \in A$ wraz z pewnym otoczeniem $O(P_0, r) \in A$ oraz spełnione są warunki:

1. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$;
2. $W(x_0, y_0) > 0$,

to funkcja f ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum lokalne. W przypadku $f''_{xx}(x, y) > 0$ lub co na jedno wychodzi $f''_{yy}(x, y) > 0$ jest to minimum lokalne; w przypadku gdy $f''_{xx}(x, y) < 0$ lub $f''_{yy}(x, y) < 0$ jest to maksimum lokalne.

Tw. *(warunek wykluczający ekstremum lokalnego).*
Jeżeli $A \subset R^2$ i funkcja $f : A \to R$ jest klasy C^2 na A, punkt $P_0(x_0, y_0) \in A$ wraz z pewnym otoczeniem $O(P_0, r) \in A$ oraz spełnione są warunki:

3. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$;
4. $W(x_0, y_0) < 0$,

to funkcja f nie ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum lokalne.

PRZYKŁAD. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = 3x^2 y - 6xy + y^3.$$

ROZWIAZANIE. Obliczamy pierwsze pochodne funkcji:

$$f'_x(x, y) = 6xy - 6y, \ f'_y(x, y) = 3x^2 - 6x + 3y^2.$$

Następnie przyrównujemy te pochodne do zera

$$f'_x(x, y) = 0 \Rightarrow 6xy - 6y = 0 \Rightarrow 6y(x-1) = 0,$$

$$f'_y(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Rozwiązujemy dany układ równań, uzyskujemy:

$$\begin{matrix} y = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{matrix}.$$

Dane układy maja rozwiązania $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (1,1)$ i $P_4 = (1,-1)$,. Są to współrzędne punktów podejrzanych o ekstremum. Obliczamy teraz drugie pochodne i wyróżnik funkcji:

$$f''_{xx}(x,y)=6y,\ f''_{yy}(x,y)=6y,\ f''_{yx}(x,y)=6(x-1),\ f''_{xy}(x,y)=6(x-1).$$
$$W(x,y)=f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left[f''_{xy}(x,y)\right]^2=36\left(y^2-(x-1)^2\right).$$
Następnie podstawiamy współrzędne znalezionych punktów do wyróżnika:
$$W(0,0)=36\left(0^2-(0-1)^2\right)=-36<0.$$
Zatem w punkcie $P_1=(0,0)$ funkcja nie ma ekstremum lokalnego. W punkcie $P_2=(1,-1)$ $W(2,0)=36\left(0^2-(2-1)^2\right)=-36<0$, więc funkcja nie ma ekstremum lokalnego.
W punkcie $P_3=(1,-1)$ otrzymamy: $W(1,-1)=36\left((-1)^2-(1-1)^2\right)=36>0$. Wynika stąd, że funkcja ma w punkcie ekstremum lokalne. Ponieważ $f''_{xx}(1,-1)=-6<0$, więc jest to maksimum lokalne: $f_{\max}(1,-1)=2$. Natomiast punkcie $P_4=(1,1)$ otrzymamy: $W(1,-1)=36\left(1^2-(1-1)^2\right)=36>0$. Wynika stąd, że funkcja ma w punkcie ekstremum lokalne. Ponieważ $f''_{xx}(1,1)=6>0$, więc jest to minimum lokalne: $f_{\min}(1,1)=-2$.

8. Największa i najmniejsza wartość funkcji.

Ekstrema lokalne funkcji f dwu zmiennych niezależnych x i y mówią o przyjmowaniu przez funkcje wartości ekstremalnych w pewnym dostatecznie małym otoczeniu jakiegoś punktu. Bardzo często należy znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w pewnym obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D}$. Postępujemy wtedy w następujący sposób:

1. Znajdujemy najpierw wszystkie ekstrema lokalne danej funkcji w punktach wewnętrznych obszaru $\overline{D}$.
2. Wyznaczamy następnie największą i najmniejszą wartość funkcji na brzegu obszaru $\overline{D}$, tzn. w zb. $Fr\overline{D}$.
3. Z wartości otrzymanych w punktach 1. i 2. wybieramy największą i najmniejszą wartość funkcji.

Ekstrema lokalne funkcji f znajdujemy w sposób podany w poprzednim podpunkcie. Wystarczy przy tym wziąć pod uwagę tylko te punkty (x,y) w których znikają jednocześnie obie pochodne cząstkowe i które należą do $Int\overline{D}$. Nie ma potrzeby wyznaczenia pochodnych cząstkowych rzędu drugiego i stosowania warunku wystarczającego istnienia ekstremum, ponieważ wszystkie ekstrema funkcji f (o ile istnieją) znajdują się na pewno wśród wartości, jakie funkcja przyjmuje w punktach, w których znikają pierwsze pochodne cząstkowe. Z tego zbioru wartości należy wybrać największą i najmniejszą.

Dla zbadania, jakie wartości funkcja f przyjmuje na brzegu obszaru $Fr\overline{D}=C$ postępujemy tak:

a) Dzielimy brzeg C (o ile jest to możliwe) na skończona liczbę krzywych o równaniach typu:
$$y=g(x) \text{ gdzie } a\le x\le b \tag{30}$$
lub
$$x=h(y) \text{ gdzie } c\le x\le d \tag{31}$$
Wzdłuż każdej krzywej (30) lub (31) nasza funkcja przechodzi odpowiednio funkcją tylko jednej zmiennej x lub y:
$$f(x,g(x))=\Psi(x) \text{ gdzie } a\le x\le b \tag{32}$$
lub
$$f(y,g(y))=\Phi(y) \text{ gdzie } c\le y\le d. \tag{33}$$
b) Wyznaczamy następnie największą i najmniejszą wartość każdej funkcji (32) na przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$ i każdej funkcji (33) na przedziale domkniętym $\langle c,d\rangle$.

UWAGA. Jeżeli brzeg C obszaru domkniętego $\overline{D}$ dany jest równaniami parametrycznymi

$$x=\varphi(t),\ y=\chi(t) \text{ gdzie } \alpha \le t \le \beta, \tag{34}$$

to na tym brzegu funkcja f jest funkcja jednej zmiennej t:

$$f(\varphi(t),\chi(t))=\theta(t) \text{ gdzie } \alpha \le t \le \beta \tag{35}$$

Reasumując widzimy, że wyznaczenie najmniejszej i największej wartości funkcji f dwu zmiennych x i y na brzegu C obszaru $\overline{D}$ sprowadza się do znalezienia najmniejszej i największej wartości funkcji jednej zmiennej na odpowiednim przedziale.

PRZYKŁAD. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$z=x^2y(2-x-y)$$

na trójkącie ograniczonym prostymi $x=0, y=0, x+y=6$.

ROZWIAZANIE. Wyznaczamy najpierw tylko te punkty, które leżą wewnątrz rozważanego trójkąta i w których znikają jednocześnie pierwsze pochodne danej funkcji

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy(4-3x-2y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2(2-x-2y).$$

$$xy(4-3x-2y)=0,\ x^2(2-x-2y)=0.$$

Ponieważ chodzi nam o punkty, które leżą tylko wewnątrz trójkąta, więc możemy podzielić pierwsze równanie przez xy, a drugie przez x^2, bo wewnątrz rozważanego trójkąta mamy $x>0, y>0$. Układ redukuje się wtedy do układu

$$4-3x-2y=0,\ 2-x-2y=0,$$

rozwiązując który otrzymamy $x_0=1, y_0=\frac{1}{2}$. Zatem takim punktem wewnątrz trójkąta jest $P_0=\left(1,\frac{1}{2}\right)$. $z_0=z\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Wyznaczamy teraz największą i najmniejszą wartość funkcji na brzegu rozważanego trójkąta. Wzdłuż boków trójkąta o równaniach $x=0, y=0$ wartość rozważanej funkcji jest równa zeru. Aby wyznaczyć wartość funkcji wzdłuż prostej $x+y=6$ wyznaczamy $y=6-x$ dla $0\le x\le 6$. Podstawiając otrzymane wyrażenie do rozważanej funkcji otrzymamy

$$z=z(x)=-4x^2(6-x).$$

Jest to funkcja jednej zmiennej. Obliczymy jej pochodną

$$z'=z'(x)=-48x+12x^2=12x(x-4)\Rightarrow z'=0\Rightarrow 12x(x-4)=0\Rightarrow x=0\lor x=4.$$

Ponieważ wewnątrz przedziału $\langle 0,6\rangle$ jest $x>0$, więc mamy

$$z=z(4)=-4\cdot 16^2(6-4)=-128 \text{ oraz } y=y(4)=2.$$

Na końcach przedziału mamy $z(0)=z(6)=0$.

Zbierając otrzymane wyniki otrzymamy

$$z_{\max}=\frac{1}{4},\ z=0,\ z_{\min}=-128$$