CAŁKI NIEOZNACZONE. cz. 2.
CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH I NIEWYMIERNYCH ZAWIERAJĄCYCH PIERWIASTEK Z WYRAŻENIA LINIOWEGO.

1. Całkowanie funkcji wymiernych.

1. Całkę typu I można podzielić na dwie podgrupy:

a) $$I=\int (ax+b)^n A dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t \,|\, (\ )' \\ a dx = dt \,|\, \div a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array} \right| = \frac{A}{a}\int t^n dx = \frac{A}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C = \frac{A}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C, \quad (1)$$

gdzie $n \geq 1$ naturalne, $A, a, b \in R$,

b) $$I=\int \frac{A dx}{(ax+b)^n} = \left| \begin{array}{l} ax+b=t \,|\, (\ )' \\ a dx = dt \,|\, \div a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array} \right| = \frac{A}{a}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{A}{a}\int t^{-n}dt \Rightarrow,$$ gdzie $n \geq 1$ naturalne,

Otrzymujemy wtedy

$$\Rightarrow I = A\int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \frac{A}{a(-n+1)}(ax+b)^{-n+1}+C, gdy: n>1 \\ \frac{A}{b}\ln|ax+b|+C, gdy: n=1 \end{cases}. \quad (2)$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całki

a) $$\int (3x+7)^5 A dx = \left| \begin{array}{l} 3x+7=t \,|\, (\ )' \\ 3dx = dt \,|\, \div 3 \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^5 dx = \frac{1}{3}\frac{t^{5+1}}{5+1}+C = \frac{(3x+7)^6}{18}+C,$$ gdzie

b) $$\int \frac{2dx}{(x-5)^4} = 2\int (x-5)^{-4}dx = \left| \begin{array}{l} x-5=t \,|\, (\ )' \\ dx = dt \end{array} \right| = 2\int t^{-4}dt = 2\frac{t^{-4+1}}{-4+1} = 2\frac{t^{-3}}{-3} =$$

$$= 2\frac{(x-5)^{-4+1}}{-4+1}+C = 2\frac{(x-5)^{-3}}{-3}+C = -\frac{2}{3(x-5)^3}+C,$$

c) $$\int \frac{2dx}{x-5} = 2\int \frac{dx}{x-5} = 2\ln|x-5|+C.$$

Zadania do przerobienia W. Krysicki, L. Włodarski: „Analiza matematyczna w zadaniach. Cz.1.”: 16.26, 16.27.

2. Całkę typu

(II) $$I=\int \frac{dx}{x^2+k},$$ gdzie $k>0$,

obliczamy według wzoru

$$\int \frac{dx}{x^2+k} = \frac{1}{\sqrt{k}} ar\,\mathrm{ctg}\frac{x}{\sqrt{k}} + C \tag{3}$$

Słuszność tego wzoru wynika z definicji funkcji pierwotnej.

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{x^2+6} = \frac{1}{\sqrt{6}} ar\,\mathrm{ctg}\frac{x}{\sqrt{6}} + C$$

3. Całkę typu

(III) $$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

$a, b, c \in R$, wyznaczamy w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$ trójmianu kwadratowego. I tak:

a) Jeżeli $\Delta \ge 0$, to funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ oraz } \frac{Bx+C}{\left(ax^2+bx+c\right)^p}, \tag{4}$$

gdzie A, B, C, a, b, c, k, p są stałe, przy czym $b^2 - 4ac < 0$ (wyróżnik trójmianu ax^2+bx+c jest ujemny, a k i p są liczbami naturalnymi. Otrzymane ułamki proste całkujemy według wzorów (1). Można to zapisać w postaci następującego schematu:

1. Obliczamy Δ z trójmianu kwadratowego, znajdującego się w mianowniku $\Delta = b^2 - 4ac$. Następnie wyznaczamy jego pierwiastki i zapisujemy w postaci iloczynowej: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ i podstawiamy do wyrażenia podcałkowego.
2. Wypisujemy wyrażenia podcałkowe i rozkładamy, go na ułamki proste :
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}, \tag{5}$$
gdzie A, B – są liczbami rzeczywistymi.
3. Następnie te ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika, opuszczamy nawiasy i grupujemy współczynniki przy x i bez:
$$\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+Ba(x-x_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{Ax - Ax_2 + Bax - Bx_1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \tag{6}$$
$$= \frac{(A+Ba)x + (-Ax_2 - Bx_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$
4. Ponieważ pomiędzy tymi wszystkimi ułamkami wyrażenia (5) jego dalszą częścią wyrażenia (6) są znaki równości, To możemy przyrównać do siebie pierwszy ułamek wyrażenia (5) i ostatni wyrażenia (6):
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{(A+Ba)x+(-Ax_2-Bx_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)} \Rightarrow \begin{cases} 1 = (A+Ba)x + (-Ax_2 - Bx_1) \\ ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \end{cases} \Rightarrow$$
$$1 = (A+Ba)x + (-Ax_2 - Bx_1) \Rightarrow\Rightarrow \underline{0 \cdot x} + \underline{\underline{1}} = \underline{(A+Ba)x} + \underline{\underline{(-Ax_2 - Bx_1)}} \Rightarrow \tag{7}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A + Ba \\ 1 = -Ax_2 - Bx_1 \end{cases}$$
5. Z ostatniego układu zależności (7) wyznaczamy A, B, które podstawiamy do pierwszych dwóch ułamków równości (6), a te ułamki podstawiamy liczonej do całki:

$$\int\left(\frac{A}{a\left(x-x_1\right)}+\frac{B}{x-x_2}\right)dx=\int\frac{A}{a\left(x-x_1\right)}dx+\int\frac{B}{x-x_2}dx=\frac{A}{a}\int\frac{dx}{\left(x-x_1\right)}+B\int\frac{dx}{x-x_2}= \tag{8}$$
$$=\frac{A}{a}\ln\left|x-x_1\right|+B\ln\left|x-x_2\right|+C.$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{(x+1)}+\frac{-\frac{1}{4}}{(x+5)}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+5)}=\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+5|+C=$$
$$=\ln\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+5}}+C.$$

$x^2+6x+5=0$, $\Delta=b^2-4ac=36-20=16>0$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$,

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+4}{2}=-1$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-4}{2}=-5$.

$x^2+6x+5=1\cdot\left(x+1\right)\left(x+5\right)$,

$$\frac{1}{x^2+6x+5}=\frac{1}{(x+1)(x+5)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+5)}=\frac{A(x+5)+B(x+1)}{(x+1)(x+5)}=$$
$$=\frac{Ax+5A+Bx+B}{(x+1)(x+5)}=\frac{(A+B)x+5A+B}{(x+1)(x+5)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\5A+B=1\end{array}\right\}\Rightarrow 4A=1\Rightarrow A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4}$$

Teraz te współczynniki podstawiamy do ułamków, a ułamki do całek, tzn. realizujemy podpunkt 5.

b) Jeżeli $\Delta\le 0$, to całkę typu (III) sprowadzamy do całki typu (II) rozpatrzonej w punkcie 2. Osiągamy to przez sprowadzenie trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]. \tag{9}$$

Dalej dokonujemy podstawienia $x+\frac{b}{2a}=t\,\big|\left(\ \right)'\Rightarrow dx=dt$ i korzystamy z wzoru (3), tzn.

$$\int\frac{dx}{x^2+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}ar\,\mathrm{ctg}\frac{x}{\sqrt{k}}+C\quad.$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2+4}=\left|\begin{array}{c}x-1=t\,\big|\left(\ \right)'\\dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{\sqrt{4}}ar\,\mathrm{ctg}\frac{t}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}ar\,\mathrm{ctg}\frac{\left(x-1\right)}{2}+C.$$

Zadania do przerobienia W. Krysicki, L. Włodarski: „Analiza matematyczna w zadaniach. Cz.1.”: 16.36,16.37,16.40, 16.41.

4. Całkę typu

(IV) $$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$$

$a, b, c, M, N \in R$ wyznaczamy w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$ trójmianu kwadratowego. I tak:

a) Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste. Otrzymane ułamki proste całkujemy według wzorów (4) z podpunktu a). Podpunkt 1 jest taki sam.

1. Obliczamy Δ z trójmianu kwadratowego, znajdującego się w mianowniku $\Delta = b^2 - 4ac$. Następnie wyznaczamy jego pierwiastki i zapisujemy w postaci iloczynowej: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ i podstawiamy do wyrażenia podcałkowego.
2. Różnica w rozwiązaniu będzie, zaczynając od podpunktu 2. Następująca: wypisujemy wyrażenia podcałkowe i rozkładamy, go na ułamki proste :
$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \frac{Mx+N}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}, \tag{10}$$
gdzie A, B – są liczbami rzeczywistymi.
3. Tutaj jest tak samo, tzn. ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika, opuszczamy nawiasy i grupujemy współczynniki przy x i bez:
$$\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+Ba(x-x_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{Ax-Ax_2+Bax-Bx_1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \\ = \frac{(A+Ba)x+(-Ax_2-Bx_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)}. \tag{11}$$
4. Ponieważ pomiędzy tymi wszystkimi ułamkami wyrażenia (10) jego dalszą częścią wyrażenia (11) są znaki równości, To możemy przyrównać do siebie pierwszy ułamek wyrażenia (10) i ostatni wyrażenia (11):
$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \frac{(A+Ba)x+(-Ax_2-Bx_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)} \Rightarrow \begin{cases} Mx+N = (A+Ba)x+(-Ax_2-Bx_1) \\ ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Mx+N = (A+Ba)x+(-Ax_2-Bx_1) \Rightarrow \underline{M}x + \underline{\underline{N}} = \underline{(A+Ba)}x + \underline{\underline{(-Ax_2-Bx_1)}} \Rightarrow \tag{12}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} M = A+Ba \\ N = -Ax_2 - Bx_1 \end{cases}$$
5. Dalej będzie tak samo, z ostatniego układu zależności (12) wyznaczamy A, B, które podstawiamy do pierwszych dwóch ułamków równości (11), a te ułamki podstawiamy liczonej do całki:
$$\int\left(\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}\right)dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{x-x_2}dx = \frac{A}{a}\int \frac{dx}{(x-x_1)} + B\int \frac{dx}{x-x_2} = \\ = \frac{A}{a}\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + C. \tag{13}$$

b) Jeżeli $\Delta \leq 0$, to całkę typu (IV) przedstawiamy w postaci sumy algebraicznej dwu całek
$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = A_1\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + A_2\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}. \tag{14}$$
W liczniku pierwszej całki mamy pochodną mianownika, więc na podstawie wzoru
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + C \tag{15}$$

i wynikiem tej całki będzie $\ln\left|ax^2+bx+c\right|$, natomiast w drugiej całce mianownik sprowadzamy do postaci kanonicznej wzorem (9) i robimy podstawienie $x+\frac{b}{2a}=t\left|\left(\ \right)'\right. \Rightarrow dx=dt$ wynikiem będzie całka (3), tzn.

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}}arc\,\mathrm{tg}\frac{t}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}}arc\,\mathrm{tg}\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}}. \qquad (15)$$

Niezależne współczynniki A_1, A_2 obliczamy dzieląc licznik $Mx+N$ przez pochodną mianownik ax^2+bx+c. Iloraz z dzielenia daje współczynnik A_1, natomiast reszta jest współczynnikiem A_2, tzn.:

$$\frac{(Mx+N)\div(2ax+b)=A_1}{reszta=A_2}$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całki

i)

$$\int\frac{(3x-5)\,dx}{x^2+6x+5}=\int\left(\frac{-2}{(x+1)}+\frac{5}{(x+5)}\right)dx=-2\int\frac{dx}{(x+1)}+5\int\frac{dx}{(x+5)}=-2\ln|x+1|+5\ln|x+5|+C=$$

$$=-\ln|x+1|^2+\ln|x+5|^5+C=\ln|x+5|^5-\ln|x+1|^2+C=\ln\frac{|x+5|^5}{|x+1|^2}+C.$$

$x^2+6x+5=0$, $\Delta=b^2-4ac=36-20=16>0$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$,

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+4}{2}=-1$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-4}{2}=-5$.

$x^2+6x+5=1\cdot(x+1)(x+5)$,

$$\frac{3x-5}{x^2+6x+5}=\frac{3x-5}{(x+1)(x+5)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+5)}=\frac{A(x+5)+B(x+1)}{(x+1)(x+5)}=$$

$$=\frac{Ax+5A+Bx+B}{(x+1)(x+5)}=\frac{(A+B)x+5A+B}{(x+1)(x+5)},$$

$$\left.\begin{array}{r}A+B=3\\5A+B=-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}B=3-A\\5A+3-A=-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}B=3-A\\4A=-8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}B=5\\A=-2\end{array}\right\}.$$

Teraz te współczynniki podstawiamy do ułamków, a ułamki do całek, tzn. realizujemy podpunkt 5.

ii)

$$\int\frac{(2x+3)dx}{x^2+6x}=\int\frac{(2x+3)dx}{(x+6)x}\Rightarrow$$

Jak widać mianownik w danej całce od razu można przedstawić w postaci iloczynowej poprzez wyciągnięcie x przed nawias. W tym momencie wypisujemy wyrażenie podcałkowe, rozkładamy na ułamki proste, sprowadzamy do wspólnego mianownika i grupujemy współczynniki przy x i bez:

$$\frac{2x+3}{(x+6)x}=\frac{A}{(x+6)}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+B(x+6)}{(x+6)x}=\frac{Ax+B(x+6)}{(x+6)x}=\frac{Ax+Bx+6B}{(x+6)x}=$$

$$=\frac{(A+B)x+6B}{(x+6)x}$$

Teraz przyrównujemy do siebie pierwszy ułamek i ostatni. Mianowniki są takie same wiec przyrównujemy liczniki i wyznaczamy współczynniki A, B.

$$\frac{2x+3}{(x+6)x} = \frac{(A+B)x+6B}{(x+6)x} \Rightarrow 2x+3 = (A+B)x+6B \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \Rightarrow A=2-B \Rightarrow A=\frac{3}{2} \\ 6B=3 \Rightarrow B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Otrzymane współczynniki podstawiamy do ułamków, a ułamki do całki:

$$\int\left(\frac{A}{(x+6)}+\frac{B}{x}\right)dx = \int\left(\frac{\frac{3}{2}}{(x+6)}+\frac{\frac{1}{2}}{x}\right)dx = \int\frac{\frac{3}{2}}{(x+6)}dx + \int\frac{\frac{1}{2}}{x}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+6)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{3}{2}\ln|x+6| + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

iii)

$$\int\frac{(2x+3)dx}{(x+6)^2} \Rightarrow$$

Jak widać mianownik w danej całce już jest w postaci iloczynowej. W tym momencie wypisujemy wyrażenie podcałkowe, rozkładamy na ułamki proste, sprowadzamy do wspólnego mianownika i grupujemy współczynniki przy x i bez:

$$\frac{2x+3}{(x+6)^2} = \frac{A}{(x+6)} + \frac{B}{(x+6)^2} = \frac{A(x+6)+Bx}{(x+6)^2} = \frac{Ax+Bx+6A}{(x+6)^2} = \frac{(A+B)x+6A}{(x+6)^2}$$

Teraz przyrównujemy do siebie pierwszy ułamek i ostatni. Mianowniki są takie same wiec przyrównujemy liczniki i wyznaczamy współczynniki A, B.

$$\frac{2x+3}{(x+6)^2} = \frac{(A+B)x+6A}{(x+6)^2} 2x+3 = (A+B)x+6A \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \Rightarrow B=2-A \Rightarrow B=\frac{3}{2} \\ 6A=3 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Otrzymane współczynniki podstawiamy do ułamków, a ułamki do całki:

$$\int\left(\frac{A}{(x+6)}+\frac{B}{(x+6)^2}\right)dx = \int\left(\frac{A}{(x+6)}+\frac{B}{(x+6)^2}\right)dx = \int\frac{\frac{3}{2}}{(x+6)}dx + \int\frac{\frac{1}{2}}{(x+6)^2}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+6)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+6)^2} = \left|\begin{matrix} x+6=t|(\ \ )' \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{t} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{t^2} = = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{t} + \frac{1}{2}\int t^{-2}dx$$
$$= \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{3}{2}\ln|x+6| + \frac{1}{2}\frac{(x+6)^{-1}}{-1} + C == \frac{3}{2}\ln|x+6| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+6)} + C$$

b) Jeżeli $\Delta \leq 0$, to całkę typu (III) sprowadzamy do całki typu (II) rozpatrzonej w punkcie 2. Osiągamy to przez sprowadzenie trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$\begin{aligned}&(4x-6)\div(2x-2)=2=A_1\\&\underline{-4x+4}\\&-2=A_2\end{aligned}$$

$$\int\frac{(4x-6)\,dx}{x^2-2x+5}=A_1\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+5}+A_2\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=\left|\begin{matrix}x-1=t\,\Big|\,(\ )'\\ dx=dt\end{matrix}\right|=2\ln\left|x^2-2x+5\right|-2\int\frac{dt}{t^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|x^2-2x+5\right|-2\int\frac{dt}{t^2+4}=2\ln\left|x^2-2x+5\right|-2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}ar\operatorname{ctg}\frac{t}{\sqrt{4}}+C=$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|x^2-2x+5\right|-2\cdot\frac{1}{2}ar\operatorname{ctg}\frac{(x-1)}{2}+C=2\ln\left|x^2-2x+5\right|-ar\operatorname{ctg}\frac{(x-1)}{2}+C$$

Zadania do przerobienia W. Krysicki, L. Włodarski: „Analiza matematyczna w zadaniach. Cz.1.”: 16.44,16.45,16.46,16.5116.56, 16.61.

5. Całkę typu

(V) $$I_n=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n},\ \text{gdzie } n\geq 2 \text{ naturalne,}$$

obliczamy według następującego wzoru rekurencyjnego:

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}},\ \text{gdzie}\qquad I_{n-1}=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n},\tag{16}$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{2\cdot3-2}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}I_{3-1}=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{4}I_2=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2\cdot2-2}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}I_{2-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2\cdot2-2}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}I_{2-1}\right]=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^1}+\frac{1}{2}I_1\right]=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}I_1=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}I_1=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{1+x^2}==\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}arctgx+C$$

6. Całkę typu

(VI) $$I=\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n},\ n\geq 2 \text{ naturalne,}$$

(VII) wyznaczamy w zależności od znaku wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$ trójmianu kwadratowego. I tak:

a) Jeżeli $\Delta\geq 0$ to funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste. Otrzymane ułamki proste całkujemy według wzorów (1).
b) Jeżeli $\Delta<0$, to całkę typu (VI) sprowadzamy do całki typu (V). Osiągamy to przez sprowadzenie trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej.

7. Całkę typu

(VIII) $$I=\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n},\ n\geq 2 \text{ naturalne,}$$

wyznaczamy w zależności od znaku wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$ trójmianu kwadratowego. I tak:

c) Jeżeli $\Delta \geq 0$ to funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste. Otrzymane ułamki proste całkujemy według wzorów (1).

d) Jeżeli $\Delta < 0$, to całkę typu (VI) przedstawiamy w postaci sumy algebraicznej dwu całek:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx = A_1\int \frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx + A_2\int \frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx. \qquad (5)$$

Rozkład jest zawsze możliwy i jednoznaczny. Nieznane współczynniki A_1, A_2 w prawej stronie rozkładu wyliczamy dzieląc licznik $Mx+N$ przez pochodną trójmianu kwadratowego. Iloraz z dzielenia jest równy współczynnikowi A_1, reszta – współczynnikowi A_2. Następnie pierwsza całkę po prawej stronie rozkładu wyliczamy stosując podstawienie $ax^2+bx+c=t$; drugą całkę po prawej stronie rozkładu jako całkę typu (VI), obliczamy jak w punkcie 6.

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{\left(x^4+2x^2+1\right)\left(x^4-3x^3+3x^2-x\right)}dx;$$

$$\left(x^4+2x^2+1\right)\left(x^4-3x^3+3x^2-x\right) = \left(x^2+1\right)^2(x-1)^3x;$$

;

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)^3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+1}$$

$$x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1 = A(x-1)^3\left(x^2+1\right)^2 + Bx\left(x^2+1\right)^2 + Cx(x-1)\left(x^2+1\right)^2 +$$
$$+ Dx(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2 + x(Ex+F)(x-1)^3 + x(Gx+H)(x-1)^3\left(x^2+1\right);$$

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)^3x} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1} + \frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$\int \frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)^3x}dx = -\int\frac{1}{x}dx - \int\frac{2}{(x-1)^3}dx + \int\frac{1}{x-1}dx + \int\frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{(x-1)^2} + \ln|x-1| - \int\frac{2xdx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{(x-1)^2} - 2\cdot\frac{-1}{x^2+1} + \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}ar\operatorname{ctg}x + C$$

Reasumując rozważania, możemy powiedzieć, że potrafimy scałkować każdą funkcję wymierną właściwą. Rozkładając ją bowiem na ułamki proste i całkując te ostatnie dochodzimy do całki rozpatrzonej w jednym z punktów od 1 do 7. Ponieważ funkcja wymierna niewłaściwa może byś przedstawiona jako suma algebraiczna wielomianu i funkcji wymiernej właściwej, możemy stwierdzić, że potrafimy scałkować każdą funkcję wymierną (właściwą lub niewłaściwą).

Zadania do przerobienia W. Krysicki, L. Włodarski: „Analiza matematyczna w zadaniach. Cz.1.”: 16.74,16.77.

Podpowiedź do zadania 16.77.
Rozkład na ułamki proste powinien wyglądać tak:

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)}$$