Całkowanie funkcji trygonometrycznych.

9. Całkę typu

$$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$$

(11)

gdzie R jest funkcją wymierną względem $\sin x$ oraz $\cos x$, wyznaczamy stosując następujące:

<u>Tw.</u> Całka typu (11) daje się zawsze sprowadzić do całki z funkcji wymiernej zmiennej t, czyli do całki z ilorazu dwu wielomianów względem t.

DOWÓD.
Przyjmijmy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=t,-\pi<x<\pi. \tag{12}$$

Wynika stąd kolejno, że

$$x=2ar\operatorname{ctg}t \tag{13}$$

oraz

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Z trygonometrii wiadomo, że przy podstawieniu (12) funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$ wyrażają się wymiernie przez t:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

W ten sposób całka przekształca się z całki trygonometrycznej na całkę funkcji wymiernej zmiennej t:

$$\int R(\sin x,\cos x,\operatorname{tg}x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Rozważmy całkę typu

$$\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x\right)dx.$$

Można tu zastosować poprzednią metodę, ale rachunki upraszczają się znacznie przy podstawieniu

$$\operatorname{tg}x=t,\ \text{skąd}\ x=ar\operatorname{ctg}x,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ze wzorów trygonometrycznych

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \sin x\cos x=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

otrzymujemy

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

i po podstawieniu otrzymujemy całkę

$$\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x\right)dx=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt,$$

tj. całkę funkcji wymiernej zmiennej t.
PRZYKŁAD.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5(1+t^2)+4(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+5t^2+4-4t^2} =$

$\displaystyle= \int \frac{2dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} ar\operatorname{ctg}\frac{x}{3} + C .$

b) $\displaystyle\int \frac{3+\sin^2 x}{2\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{3+\frac{t^2}{1+t^2}}{2\frac{1}{1+t^2} - \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \frac{dt}{1+t^2} =$

$\displaystyle= \int \frac{\frac{3(1+t^2)+t^2}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2(1+t^2)-1}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(3+3t^2+t^2)dt}{2+2t^2-1} = \int \frac{(3+4t^2)dt}{1+2t^2} = \int \left(2 - \frac{1}{1+2t^2}\right)dt = 2t - \sqrt{2} ar\operatorname{ctg}\sqrt{2}t =$

$= 2\operatorname{tg} x - \sqrt{2} ar\operatorname{ctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C$

Jeżeli funkcja podcałkowa $R(\sin x \cos x)$ w całce typu $\int R(\sin x \cos x)dx$ jest funkcją:

a) nieparzystą względem $\sin x$, to stosujemy podstawienie
$$\cos x = t,$$
b) nieparzystą względem $\cos x$, to stosujemy podstawienie
$$\sin x = t,$$
c) parzystą względem $\sin x$ oraz $\cos x$, to stosujemy podstawienie
$$\operatorname{tg} x = t.$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę:

a) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} = -\frac{\sin^5 x}{5} + C ,$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)}{t^2} dt =$

$\displaystyle= \int \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$,

c) $\displaystyle\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^5 x}{5} + C .$

Całki typów

$$I_1 = \int \sin ax \cos bx dx, \text{ gdzie } |a| \neq |b|,$$
$$I_2 = \int \sin ax \sin bx dx, \text{ gdzie } |a| \neq |b|,$$
$$I_3 = \int \cos ax \cos bx dx, \text{ gdzie } |a| \neq |b|,$$

obliczamy wyrażając iloczyny funkcji trygonometrycznych, występujące pod znakiem całki, jako kombinacje liniowe tych funkcji z odpowiednimi argumentami. Stosujemy wtedy odpowiednio następujące tożsamości trygonometryczne:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)];$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)];$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)].$$

PRZYKŁAD.
Obliczyć całkę:

$$\int \cos 5x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(5x-7x) + \cos(5x+7x)]dx = \frac{1}{2}\int \cos(-2x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(13x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(13x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}\sin 13x + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{26}\sin 13x + C.$$

W całkach typu $I_1 = \int \sin^n x dx$ oraz $I_2 = \int \cos^n x dx$ gdzie $n = 2k$ tzn., że n jest liczbą parzysta, wyrażenie podcałkowe przekształcamy przy pomocy następujących wzorów trygonometrycznych

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

PRZYKŁAD.

Obliczyć całkę: $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\cdot 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C.$$

W całkach typu $I_1 = \int \mathrm{tg}^n x dx$ oraz $\boldsymbol{I_2 = \int \mathrm{ctg}^n x dx}$ gdzie $n \in N$ wyrażenie podcałkowe zapisujemy w postaci $\mathrm{tg}^n x = \mathrm{tg}^{n-2} x \cdot \mathrm{tg}^2 x$, $\mathrm{ctg}^n x = \mathrm{ctg}^{n-2} x \cdot \mathrm{ctg}^2 x$. W otrzymane wyrażenia podcałkowe przekształcamy przy pomocy następujących wzorów trygonometrycznych

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \; 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

PRZYKŁAD.

a) $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \mathrm{tg}^3 x \cdot \mathrm{tg}^2 x dx = \int \mathrm{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \mathrm{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \mathrm{tg}^3 x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt - \end{array} \right| = \int t^3 dt + \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{t^4}{4} + \int \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + \int \frac{dt}{t} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|t| = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C \,;$$

b) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \operatorname{ctg} x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t \\ -\frac{1}{\sin^2 x} dx = dt - \end{array} \right| = -\int t dt - \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = -\frac{t^2}{2} - \int \frac{dt}{t} = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|t| =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$$

ZADANIA DO PRZEROBIENIA: 18.31, 18.32, 18.35, 18.39, 18.42, 18.41, 18.45, 18.46, 18.47, 18.50, 18.55, 18.60, 18.77, 18.82.