CAŁKI NIEOZNACZONE. Cz. 1.
PODSTAWOWE METODY CAŁKOWANIA.

1. Funkcja pierwotna.

Mówimy, że funkcja pierwotna F jest *funkcją pierwotną* funkcji f w pewnym przedziale J (właściwym lub niewłaściwym), jeżeli w każdym punkcie x tego przedziału pochodna funkcji F równa się funkcji f, czyli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in J.$$

Jeżeli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f na przedziale J, to funkcje te różnią się między sobą w tym przedziale o stałą.

Odwrotnie, funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f, jest również funkcją pierwotną funkcji f. W konsekwencji wyrażenie $F(x)+C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f.

Wyrażenie $F(x)+C$ oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$ i nazywamy *całką nieoznaczoną funkcji* f.

Mamy więc

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad F'(x) = f(x).$$

Wyznaczenie funkcji pierwotnej lub – co na jedno wychodzi – znajdywanie całki nieoznaczonej nazywamy *całkowaniem,* a samą metodę postępowania nazywamy *rachunkiem całkowym*. Z definicji funkcji pierwotnej wynika natychmiast, że

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \text{ oraz } \int f'(x)dx = f(x)+C \qquad (1)}$$

przy założeniu, że funkcja pierwotna istnieje.

Krzywą o równaniu $y = F(x)$, gdzie F jest jedną z całek nieoznaczonych funkcji f, nazywamy *krzywą całkową* funkcji f.

2. Podstawowe wzory całek nieoznaczonych.

Z wzorów z poprzedniego paragrafu wynika, że różniczkowanie i całkowanie są operacjami odwrotnymi wykonywanymi na funkcjach. Obliczanie całek jest jednak o wiele trudniejsze niż obliczanie pochodnych.

Z definicji funkcji pierwotnej wynikają natychmiast następujące **podstawowe wzory dla całek nieoznaczonych** (Te wzory należy umieć na pamięć. Są one odwrotnością wzorów na pochodne funkcji elementarnych) :

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, gdzie $x \neq -1$ jest rzeczywista,
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,
7. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = ar\operatorname{ctg} x + C = -arc\operatorname{ctg} x + C$,

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C = -arc\cos x + C$,

9. $\int e^x dx = e^x + C$,

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C$,

11. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$,

12. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$.

Dla ułatwienia obliczeń z wzoru 1. Wynikają bezpośrednio następujące wzory:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C \\ \int \sqrt[n]{x^m}\, dx = \int x^{\frac{m}{n}}\, dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} dx = \int x^{-\frac{m}{n}}\, dx = \frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} + C \end{cases}$$

Sprawdzenie wzorów polega na różniczkowaniu funkcji występujących po prawej stronie, co daje funkcje występujące po prawej stronie.

PRZYKŁAD.
Znaleźć funkcje pierwotne funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -2x^{-2-1} + C = -2x^{-3} + C = -\frac{2}{x^3} + C$.

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$. $\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{3/5} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C$.

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$.

3. Pewne ogólne reguły całkowania.

<u>Tw.</u> Jeżeli f jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale J oraz A oznacza stałą, to

$$\int Af dx = A\int f dx + C. \tag{2}$$

<u>Tw.</u> Jeżeli f i g są funkcjami ciągłymi na pewnym przedziale J, to

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \tag{3}$$

Wzory (2) i (3) dają nam zasady całkowania: stałą można wyciągnąć przed symbol całki, a następnie liczyć całkę z samej funkcji oraz mając całkę z sumy lub różnicy dwóch bądź więcej funkcji można rozpisać na sumę lub różnicę poszczególnych funkcji. Oczywiście w przypadku dobrego opanowania zasad całkowania tych czynności nie ma potrzeby opisywać.

<u>Tw.</u> Jeżeli f jest różną od zera funkcją i ma ciągłą pochodną na pewnym przedziale J, to

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left| f(x) \right| + C. \tag{4}$$

Tw. Jeżeli f jest większą od zera funkcją i ma ciągłą pochodną na pewnym przedziale J, to

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C . \qquad (5)$$

Natomiast wzory (3) i (4) pozwalają przyśpieszyć obliczenie gałek nie używając podstawienia.

PRZYKŁAD.

a) $\int\left(x^2+\frac{1}{3x}\right)dx = \int x^2dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x|+C$;

b) $\int\left(e^x-\sin x-1\right)dx = \int e^xdx - \int\sin xdx - \int 1dx = e^x+\cos x - x + C$;

c) $\int\frac{x}{1-5x^2}dx = -\frac{1}{10}\int\frac{-10x}{1-5x^2}dx = -\frac{1}{10}\ln\left|1-5x^2\right|+C$;

d) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x}} = -\frac{1}{4}\int\frac{-4}{\sqrt{1-4x}}dx = -\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{1-4x}+C$;

e) $\int\frac{\left(x^2-2\right)^3dx}{2x} = \frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2\right)^3-3\left(x^2\right)^2\cdot 2+3x^2\cdot 2^2-2^3}{x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^6-3x^4\cdot 2+3x^2\cdot 4-8}{x}dx =$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^6}{x}-\frac{6x^4}{x}+\frac{12x^2}{x}-\frac{8}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(x^5-6x^3+12x-\frac{8}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^5dx - \frac{6}{2}\int x^3dx + \frac{12}{2}\int xdx - \frac{8}{2}\int\frac{dx}{x} =$

$= \frac{1}{2}\frac{x^{5+1}}{5+1} - 3\frac{x^{3+1}}{3+1} + 6\frac{x^{1+1}}{1+1} - 4\ln|x| + C = \frac{1}{2}\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + C = \frac{x^6}{12} - \frac{3x^4}{4} + 3x^2 - 4\ln|x| + C$

f) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx = \int\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{2}{3}}+4\sqrt[4]{5}x^{\frac{3}{4}}}{6\,x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}dx + \frac{2}{6}\int x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}dx + \frac{4\sqrt[4]{5}}{6}\int x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}dx =$

$= \frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{6}}dx + \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx + \frac{4\sqrt[4]{5}}{6}\int x^{\frac{5}{12}}dx = \frac{1}{6}\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + \frac{1}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + C =$

$= \frac{1}{6}\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{1}{3}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\frac{x^{\frac{17}{12}}}{\frac{17}{12}} + C = \frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\frac{12\sqrt[12]{x^{17}}}{17} + C.$

Zadania do przerobienia: W. Krysicki, L.Włodarski: 15.22, 15.23, 15.29, 15.30, 15.31, 15.33.

4. Całkowanie przez podstawienie.

Tw. 1. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. Funkcja f jest ciągła na przedziale $a \le t \le b$,
2. Funkcja g ma ciągłą pochodną na przedziale $\alpha \le x \le \beta$,
3. Wartości funkcji $g(x)$ leżą w przedziale (a,b) czyli $a \le g(x) \le b$ dla $x \in (\alpha,\beta)$, to słuszny jest wzór

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \left|\begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)dx = 1\cdot dt\end{array}\right| = \int f(t)dt \text{ dla } t = g(x).$$

Podstawienie stosujemy wtedy, gdy w wyrażeniu podcałkowym znajduje się iloczyn dwóch funkcji, przy czym jedna z nich jest pochodną drugiej. Więc przy doborze podstawienia należy spróbować policzyć pochodną jednej z funkcji i porównać z drugą, czy są takie same.

PRZYKŁAD 3.

a) $$\int \frac{dx}{5x+6} = \left| \begin{array}{c} 5x+6=t \,|\, (\ \ )' \\ 5dx = dt \,|\, \div 5 \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| = \frac{1}{5}\ln|5x+6| + C;$$

b) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{8x^3+6}} = \left| \begin{array}{c} 8x^3+6=t \,|\, (\ \ )' \\ 8\cdot 3x^2dx = dt \,|\, \div 24 \\ \frac{1}{24}dx = dt \end{array} \right|$$

c) $$\int xe^{3x^2}dx = \left| \begin{array}{c} 3x^2=t \,|\, (\ \ )' \\ 6xdx = dt \,|\, \div 6 \\ xdx = \frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int e^t dt = \frac{1}{6}e^t = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C;$$

d) $$\int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x}dx = \left| \begin{array}{c} 2+\ln|x| = t \,|\, (\ \ )' \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Zadania do przerobienia: W. Krysicki, L. Włodarski: 15.36, 15.40, 15.43, 15.47, 15.51, 15.53.

14.4. Całkowanie przez części.

__Tw. 2.__ Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na pewnym wspólnym przedziale, to słuszny jest wzór

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx + C. \qquad (6)}$$

Wzór na całowanie przez części stosujemy do całek w wyrażeniu podcałkowym których znajduje się iloczyn dwóch funkcji, przy czym żadna z nich nie jest pochodną drugiej. Wzór ten stosujemy w celu pozbycie się poprzez różniczkowanie jednej funkcji z całko po prawej stronie wzoru (6). Całki te można symbolicznie podzielić na trzy typy.

I. Do pierwszego typu należą całki, które w wyrażeniu podcałkowym zawierają iloczyny funkcji: $W_n(x)\cdot e^{ax}$, $W_n(x)\cdot \sin ax$, $W_n(x)\cdot \cos ax$, gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem rzeczywistym stopnia n, $a \in R$. Wybór funkcji $f(x)$ i $g'(x)$ jest jednoznaczny. Jako $f(x)$ wybieramy zawsze wielomian $W_n(x)$, ponieważ poprzez n – krotne różniczkowanie ten wielomian w końcu zostanie liczbą, którą można wyciągnąć przed symbol całki. Natomiast funkcją $g'(x)$ będą funkcje e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$ (w zależności od tego którą funkcje mamy w zadaniu), ponieważ te funkcje nie znikają ani przy różniczkowaniu, ani przy całkowaniu. Teraz aby użyć danego wzoru z wielomianu należy obliczyć pochodną, a z funkcji $g'(x)$ – całkę. Wzór stosujemy n razy.

a) Jeżeli mamy całkę postaci: $\int W_n(x)\cdot e^{ax}dx$, to w niej wybór funkcji $f(x)$ i $g'(x)$ wygląda tak:

$$f(x) = W_n(x), \qquad\qquad g'(x) = e^{ax},$$

$$f'(x) = nW_{n-1}(x), \quad g(x) = \int e^{ax}dx = \left| \begin{matrix} ax = t|(\ \ )' \\ adx = dt|\div a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int e^t dt = \frac{1}{a}e^t = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

b) Jeżeli mamy całkę postaci: $\int W_n(x) \cdot \sin ax\, dx$, to w niej wybór funkcji $f(x)$ i $g'(x)$ wygląda tak:

$$f(x) = W_n(x), \qquad\qquad g'(x) = \sin ax\,,$$

$$f'(x) = nW_{n-1}(x), \quad g(x) = \int \sin ax\, dx = \left| \begin{matrix} ax = t|(\ \ )' \\ adx = dt|\div a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{a}\cos t$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax.$$

c) Jeżeli mamy całkę postaci: $\int W_n(x) \cdot \cos ax\, dx$, to w niej wybór funkcji $f(x)$ i $g'(x)$ wygląda tak:

$$f(x) = W_n(x), \qquad\qquad g'(x) = \cos ax\,.$$

$$f'^{(x)} = nW_{n-1}(x), \quad g(x) = \int \cos ax\, dx = \left| \begin{matrix} ax = t|(\ \ )' \\ adx = dt|\div a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int \cos t\, dt = \frac{1}{a}\sin t = \frac{1}{a}\sin ax$$

W przypadku, gdy umiejętność obliczenia całek jest dobra, nie jest koniecznym za każdym razem rozpisywać obliczenia funkcji $g(x)$. Można skorzystać z gotowych wzorów:

$$g(x) = \int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}. \tag{7}$$

$$g(x) = \int \sin ax\, dx = -\tfrac{1}{a}\cos ax. \tag{8}$$

$$g(x) = \int \cos ax\, dx = \tfrac{1}{a}\sin ax. \tag{9}$$

PRZYKŁAD 3.

a) Znaleźć całkę

$$\int x^2 \cos 4x dx\,.$$

Do tej całki stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = x^2$ i $g'(x) = \cos 4x$. Wzór zastosujemy dwa razy, ponieważ wielomian jest do potęgi 2. Teraz zgodnie z podpunktem I. c) mamy

1. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej

$$\left(x^2\right)' = 2x\,.$$

2. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (9)) , to jest

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x\,.$$

3. Stosując do naszej całki wzór na całkowanie przez części i uwzględniając podpunkty 1. i 2. Otrzymujemy:

4. $$I = x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right) - \int 2x \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right)dx\,.$$

5. Przepisujemy jeszcze raz, uproszczając współczynniki drugiej całki i wyciągamy je przed całką:

$$I = x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right) - \frac{1}{2}\int x \cdot \sin 4x dx .$$

6. Teraz do całki po prawej stronie znowu stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = x$ i $g'(x) = \sin 4x$.
7. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej

$$\left(x\right)' = 1.$$

8. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (8)) , to jest

$$\int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x .$$

9. Teraz 8. I 9. Podstawiamy do 5.:

$$I = x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right) - \frac{1}{2}\left[-x \cdot \frac{1}{4}\cos 4x - \int 1 \cdot \frac{1}{4}\cos 4x dx\right].$$

10. Opuszczamy nawiasy i uproszczamy:

$$I = x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right) + \frac{1}{8}x \cdot \cos 4x + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx .$$

11. Obliczamy ostatnią całkę znowu wzorem (9) i otrzymujemy

$$I = x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin 4x\right) + \frac{1}{8}x \cdot \cos 4x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C = x^2 \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}x \cdot \cos 4x + \frac{1}{32}\sin 4x + C .$$

UWAGA. Wybór funkcji $\cos x$ jako pierwszego czynnika nie jest przypadkowy. Gdybyśmy bowiem jako pierwszy czynnik przyjęli funkcję $f(x) = x$, to stosując wzór na całkowanie przez części otrzymalibyśmy

$$\int x^2 \cos 4x dx = -\frac{1}{3}x^3 \cdot 4\sin 4x + \int \frac{1}{3}x^3 \cdot 4\sin 4x dx .$$

Całka, występująca po prawej stronie jest bardziej skomplikowana niż całka po lewej stronie.

b) Znaleźć całkę

$$\int \left(4x^2 + 5\right)e^{2x} dx .$$

Do tej całki stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = 4x^2 + 5$ i $g'(x) = e^{2x}$. Wzór zastosujemy dwa razy, ponieważ wielomian jest do potęgi 2. Teraz zgodnie z podpunktem I. c) mamy

1. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej

$$\left(4x^2 + 5\right)' = 8x .$$

2. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (7)) , to jest

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} .$$

3. Stosując do naszej całki wzór na całkowanie przez części i uwzględniając podpunkty 1. i 2. Otrzymujemy:
4. $I = \left(4x^2 + 5\right) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 8x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx .$
5. Przepisujemy jeszcze raz, uproszczając współczynniki drugiej całki i wyciągamy je przed całką:

$$I = \left(4x^2 + 5\right) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - 4\int x \cdot e^{2x} dx .$$

6. Teraz do całki po prawej stronie znowu stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = x$ i $g'(x) = e^{2x}$.
7. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej

$$(x)'=1.$$

8. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (7)) , to jest
$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}.$$
9. Teraz 8. I 9. Podstawiamy do 5.:
$$I=\left(4x^2+5\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-4\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right].$$
10. Opuszczamy nawiasy i uproszczamy:
$$I=\left(4x^2+5\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-2x\cdot e^{2x}+2\int e^{2x}dx.$$
11. Obliczamy ostatnią całkę znowu wzorem (7) i otrzymujemy
$$I=\left(4x^2+5\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-2x\cdot e^{2x}+2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C=\left(4x^2+5\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-2x\cdot e^{2x}+e^{2x}+C.$$

Zadania do przerobienia: W. Krysicki, L. Włodarski: 15.68, 15.71, 15.72.

II. Do drugiego typu należą całki postaci $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, $a, b\in R$. W tego typu całkach nie ma znaczenia którą funkcję wybieramy jako $f(x)$ a którą jako $g'(x)$, ponieważ funkcja e^{ax} przy różniczkowaniu, czy całkowaniu zostanie taka sama, będzie tylko inny współczynnik. Natomiast funkcje $\sin bx$ i $\cos bx$ będą się zmieniać nawzajem. Do takich całek stosujemy wzór na całkowanie przez części dwukrotnie, Przy czym za każdym razem wybór funkcji $f(x)$ i $g'(x)$ powinien być taki sam. Zakładamy, że dokonamy następującego wyboru:
$$f(x)=\sin bx(lub\cos bx), \qquad g'^{(x)}=e^{ax},$$
$$f'^{(x)}=b\cos bx\ (lub\ b\sin bx), \quad g(x)\overset{(7)}{=}\frac{1}{a}e^{ax}.$$
Po dwukrotnym zastosowaniu wzoru w prawej części otrzymanej zależności powinniśmy otrzymać taką samą całkę jaką mieliśmy na początku, tylko ze znakiem 'minus' i jakimś współczynnikiem.

PRZYKŁAD 4.

Znaleźć całkę
$$\int e^{3x}\cdot\cos 6xdx.$$
Do tej całki stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x)=\cos 6x$ i $g'(x)=e^{3x}$. Wzór zastosujemy dwa razy, ponieważ wielomian jest do potęgi 2. Teraz zgodnie z podpunktem I. c) mamy

1. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej
$$(\cos 6x)'=-6\sin 6x.$$
2. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (7)) , to jest
$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}.$$
3. Stosując do naszej całki wzór na całkowanie przez części i uwzględniając podpunkty 1. i 2. Otrzymujemy:
4. $$I=\cos 6x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\left(-6\sin 6x\right)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}dx.$$
5. Przepisujemy jeszcze raz, uproszczając współczynniki drugiej całki i wyciągamy je przed całką:

$$I = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + 3\int \sin 6x \cdot e^{3x} dx.$$

6. Teraz do całki po prawej stronie znowu stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = \sin 6x$ i $g'(x) = e^{3x}$. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej

$$(\sin 6x)' = 6\cos 6x.$$

7. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (8)) , to jest

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

8. Teraz 8. I 9. Podstawiamy do 5.:

$$I = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + 3\left[\sin 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 6\cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx\right].$$

9. Opuszczamy nawiasy i uproszczamy:

$$I = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + 3\sin 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - 3\int 6\cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x} - 6\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx$$

.

10. Teraz przepisujemy początek zadania i koniec z podpunktu 9.:

$$\underline{\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x} - 6\underline{\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx}.$$

Podkreślone całki są takie same. Przenosimy je na jedną stronę dodajemy i wyznaczamy czemu jest równa jedna:

$$\underline{\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} + \underline{6\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x}.$$

$$(1+6)\underline{\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x}.$$

$$\underline{7\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} = \cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x} \,|\div 7.$$

$$\underline{\int \cos 6x \cdot e^{3x} dx} = \frac{1}{7}\left(\cos 6x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \sin 6x \cdot e^{3x}\right) + C.$$

Zadania do przerobienia: W. Krysicki, L. Włodarski: 15.74, 15.75.

III. Do danego typu należą całki postaci $\int x^m \cdot \ln^n x dx$, $\int \sqrt[k]{x^m} \cdot \ln^n x dx$, $\int \frac{\ln^n x}{\sqrt[k]{x^m}} dx$, $\int \ln^n x dx$.W danych całkach jako funkcję $f(x)$ wybieramy $\ln^n x$. Natomiast jako funkcję $g'(x)$ wybieramy lub x^m, lub 1, $\sqrt[k]{x^m}$, lub $\frac{1}{\sqrt[k]{x^m}}$, w zależności od tego co mamy w zadaniu, $k, m, n \in N$. Do takich całek stosujemy wzór na całkowanie przez części $n-$ krotnie, dopóki nie zniknie logarytm.

Wtedy: $f(x) = \ln^n x \Rightarrow f'(x) = n\ln^{n-1} x \cdot (\ln x)' = n\ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}$.(i)

Natomiast $g'(x)$ w zależności od zadania będzie:

$g'(x) = x^m \Rightarrow g(x) = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (ii)

$$g'(x)=1\Rightarrow g(x)=\int 1dx=x \text{(iii)}$$

$$g'(x)=\sqrt[k]{x^m}\Rightarrow g(x)=\int \sqrt[k]{x^m}dx=\int x^{\frac{m}{k}}dx=\frac{x^{\frac{m}{k}+1}}{\frac{m}{k}+1} \text{(iv)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt[k]{x^m}}\Rightarrow g(x)=\int \frac{1}{\sqrt[k]{x^m}}dx=\int x^{-\frac{m}{k}}dx=\frac{x^{-\frac{m}{k}+1}}{-\frac{m}{k}+1} \text{(v)}$$

PRZYKŁAD 5.

a) Znaleźć całkę

$$\int x^2\cdot \ln^2 xdx.$$

Do tej całki stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = \ln^2 x$ i $g'(x) = x^2$. Wzór zastosujemy dwa razy, ponieważ $\ln^2 x$ jest do potęgi 2. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej.

1. Teraz zgodnie z wzorem (i) mamy: $f(x)=\ln^2 x\Rightarrow f'(x)=2\ln^{2-1}x\cdot(\ln x)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$
2. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (ii)) , to jest
$$\int x^2dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}=\frac{x^3}{3}.$$
3. Stosując do naszej całki wzór na całkowanie przez części i uwzględniając podpunkty 1. i 2. Otrzymujemy:
4. $$I=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx.$$
5. Przepisujemy jeszcze raz, uproszczając współczynniki drugiej całki i wyciągamy je przed całką:
$$I=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\int \ln x\cdot x^2dx.$$
6. Teraz do całki po prawej stronie znowu stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x) = \ln x$ i $g'(x) = x^2$.
7. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej
$$\ln(x)'=\frac{1}{x}.$$
8. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (8)) , to jest
$$\int x^2dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}=\frac{x^3}{3}.$$
9. Teraz 8. I 9. Podstawiamy do 5.:
$$I=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\left[\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx\right].$$
10. Opuszczamy nawiasy i uproszczamy:
$$I=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\ln x\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\int x^2dx=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\ln x\cdot x^3+\frac{2}{9}\cdot\int x^2dx.$$
11. Obliczamy ostatnią całkę znowu wzorem (9) i otrzymujemy

$$I=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\ln x\cdot x^3+\frac{2}{9}\cdot\int x^2dx=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\ln x\cdot x^3+\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$
$$=\ln^2 x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\ln x\cdot x^3+\frac{2}{27}\cdot x^3+C$$

b) Znaleźć całkę

$$\int\ln^2 xdx=\int 1\cdot\ln^2 xdx.$$

Do tej całki stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x)=\ln^2 x$ i $g'(x)=1$. Wzór zastosujemy również dwa razy, ponieważ $\ln^2 x$ jest do potęgi 2. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej.

1. Teraz zgodnie z wzorem (i) mamy: $f(x)=\ln^2 x\Rightarrow f'(x)=2\ln^{2-1}x\cdot(\ln x)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$
2. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (iii)) , to jest
$$\int 1dx=x.$$
3. Stosując do naszej całki wzór na całkowanie przez części i uwzględniając podpunkty 1. i 2. Otrzymujemy:
$$I=\ln^2 x\cdot x-\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot xdx.$$
4. Przepisujemy jeszcze raz, uproszczając współczynniki drugiej całki i wyciągamy je przed całką:
$$I=\ln^2 x\cdot x-2\int\ln xdx.$$
5. Teraz do całki po prawej stronie znowu stosujemy wzór na całkowanie przez części. W tym celu wybieramy funkcje $f(x)=\ln x$ i $g'(x)=1$.
6. Znajdujemy pochodną pierwszego czynnika funkcji podcałkowej
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$
7. Wyznaczamy całkę z drugiego czynnika (skorzystano tutaj ze wzoru (iii)) , to jest
$$\int 1dx=x.$$
8. Teraz 8. I 9. Podstawiamy do 5.:
$$I=\ln^2 x\cdot x-2\left[\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx\right].$$
9. Opuszczamy nawiasy i uproszczamy:
$$I=\ln^2 x\cdot x-2\left[\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx\right]=\ln^2 x\cdot x-2\ln x\cdot x+\int 1dx$$
10. Obliczamy ostatnią całkę znowu wzorem (9) i otrzymujemy
$$I=\ln^2 x\cdot x-2\left[\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx\right]=\ln^2 x\cdot x-2\ln x\cdot x+\int 1dx=\ln^2 x\cdot x-2\ln x\cdot x+x+C.$$

Zadania do przerobienia: W. Krysicki, L. Włodarski: 15.76, 15.77, 15.79, 15.80, 15.81, 15.82.