CAŁKI NIEOZNACZONE cz.3.

Całkowanie funkcji niewymiernych.

CZĘŚĆ I

a) Całkowanie funkcji niewymiernych, zawierających pierwiastek stopnia n z wyrażenia liniowego, tzn. $\sqrt[n]{x}$.

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną potęg zmiennej x o wykładnikach postaci m/n, gdzie m,n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to wykonujemy podstawienie

$$\sqrt[N]{x} = t \Rightarrow x = t^N \Rightarrow dx = N \cdot t^{N-1}dt,$$

gdzie N oznacza wspólny mianownik ułamków postaci m/n.

PRZYKŁAD. a)Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Zakładamy, że $x > 0$. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennych $x^{1/2}$ i $x^{1/3}$, wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ jest 6, wobec tego podstawiamy $x = t^6, t \geq 0$ skąd otrzymujemy $dx = 6t^5dt, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2$. Jest więc

$$I = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

b) Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}.$$

Zakładamy, że $x \geq 0$. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennych $x^{1/2}$ i x, wobec tego podstawiamy $\sqrt{x} = t, t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 \Big| \left(\ \right)' \Rightarrow dx = 2tdt$. Teraz podstawiamy otrzymane zależności do całki i przeprowadzamy przekształcenia algebraiczne:

$$I = \int \frac{t \cdot 2tdt}{t^2-1} = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{\left(t^2-1+1\right)}{t^2-1}dt = 2\int \left(\frac{\left(t^2-1\right)}{t^2-1} - \frac{1}{t^2-1} \right) dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2-1} \right) dt = 2\left(\int 1dt - \int \frac{1}{t^2-1}dt \right) = 2\int 1dt - 2\int \frac{1}{t^2-1}dt$$

Wynik pierwszej całki mamy od razu: $\int 1dt = t + C$. Natomiast w drugiej całce mianownik wyrażenia podcałkowego należy rozłożyć na czynniki, a potem na ułamki proste:

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt = \int \left[\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right] dt.$$

Teraz wyznaczymy współczynniki A, B poznaną nam metodą i wrócimy do całki:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)}{(t-1)(t+1)}+\frac{B(t-1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)}=\frac{(A+B)t+A-B}{t^2-1}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{(A+B)t+A-B}{t^2-1}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\-B-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Teraz wracamy do całki:

$$\int\left[\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right]dt=\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right]dt=\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right]dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=\frac{1}{2}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}+C=.$$

$$=\ln\sqrt{\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|}+C$$

Wynik końcowy jest następujący:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-1}=2\int 1dt-2\int\frac{1}{t^2-1}dt=2t-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$$

Zadania do przerobienia: 17.23, 17.26, 17.27.

b) Całkowanie funkcji niewymiernych, zawierających pierwiastek stopnia n z wyrażenia liniowego, tzn. $\sqrt[n]{ax+b}$ lub $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, gdzie $a,b,c,d\in R$.

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennej x oraz potęg dwumianu $ax+b$ lub funkcji homograficznej

$$\frac{ax+b}{cx+d}\text{, gdzie } ad-bc\neq 0,$$

o wykładnikach postaci m/n, gdzie m,n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to w pierwszym przypadku wykonujemy podstawienie

$$\sqrt[N]{xa+b}=t\Rightarrow xa+b=t^N\Rightarrow x=\frac{1}{a}\left(t^N-b\right)\Rightarrow dx=\frac{1}{a}N\cdot t^{N-1}dt,$$

a w drugim przypadku

$$\sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t\Rightarrow\frac{ax+b}{cx+d}=t^N\Rightarrow ax+b=t^N(cx+d)\Rightarrow ax+b=t^N\cdot cx+t^N\cdot d\Rightarrow$$

$$dx=\frac{\left(b-t^N\cdot d\right)'\left(t^N\cdot c-a\right)-\left(b-t^N\cdot d\right)\left(t^N\cdot c-a\right)'}{\left(t^N\cdot c-a\right)^2}dt$$

$$b-t^N\cdot d=t^N\cdot cx-ax\Rightarrow b-t^N\cdot d=\left(t^N\cdot c-a\right)x\Rightarrow x=\frac{b-t^N\cdot d}{\left(t^N\cdot c-a\right)}$$

$$dx=\frac{-Nt^{N-1}\cdot d\left(t^N\cdot c-a\right)-Nt^{N-1}\cdot c\left(b-t^N\cdot d\right)}{\left(t^N\cdot c-a\right)^2}dt$$

$$dx=\frac{-Nt^{2N-1}\cdot c\cdot d+Nt^{N-1}\cdot c\cdot a-Nt^{N-1}\cdot c\cdot b+Nt^{2N-1}\cdot c\cdot d}{\left(t^N\cdot c-a\right)^2}dt\Rightarrow dx=\frac{Nt^{N-1}\cdot c\cdot(a-b)}{\left(t^N\cdot c-a\right)^2}dt$$

gdzie N oznacza mianownik ułamków postaci m/n.

PRZYKŁAD. Obliczyć całki:

a) $\int x\sqrt{2x-10}dx$.

Zakładamy, że $x\geq 5$. Podstawiamy $2x-10=t^2$, gdzie $t\geq 0$, skąd $2dx=2tdt$ a więc $dx=tdt$. Prócz tego obliczamy x ze związku $2x-10=t^2$ i otrzymujemy $x=\frac{1}{2}\left(t^2+10\right)$. W ten sposób po podstawieniu całka przyjmie postać:

$$\int x\sqrt{2x-10}dx=\frac{1}{2}\int\left(t^2+10\right)t\cdot tdt=\frac{1}{2}\int\left(t^4+10t^2\right)dt=\frac{1}{2}\int t^4dt+\frac{10}{2}\int t^2dt=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5+5\cdot\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{10}\sqrt{(2x-10)^5}+\frac{5}{3}\sqrt{(2x-10)^3}+C.$$

b) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

Zakładamy, że $x\neq 1, x\neq -1$. Podstawiamy

$$\frac{x+1}{x-1}=t^3\Rightarrow x+1=t^3(x-1)\Rightarrow x+1=t^3\cdot x-t^3\Rightarrow t^3+1=t^3\cdot x-x\Rightarrow t^3+1=x\left(t^3-1\right),$$

$$\text{skąd } x=\frac{t^3+1}{t^3-1}\Rightarrow dx=\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}=\int t\cdot\frac{\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}}{\frac{t^3+1}{t^3-1}+1}=\int\frac{\frac{-6t^3dt}{\left(t^3-1\right)^2}}{\frac{t^3+1+t^3-1}{t^3-1}}=\int\frac{\frac{-6t^3dt}{\left(t^3-1\right)^2}}{\frac{2t^3}{t^3-1}}-3\int\frac{dt}{t^3-1}=-3\int\frac{dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}.$$

$$I=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=-3\int\frac{dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}.$$

Teraz funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{1}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=$$
$$=\frac{At^2+At+A+Bt^2+Ct-Bt-C}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{t^2(A+B)+t(A-B+C)+(A-C)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$$

$$\left.\begin{array}{c|c} t^2 & A+B=0 \\ t & A-B+C=0 \\ t^0 & A-C=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c} 2A+C=0 \\ A-C=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{array}$$

Po rozkładzie na ułamki proste mamy

$$I=\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt-\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right)+\sqrt{3}ar\,\mathrm{ctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\ln|t-1|+C,\ \text{gdzie } t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Zadania do przerobienia: 17.6, 17.7, 17.10, 17.11, 17.15, 17.16, 17.17, 17.18, 17.22, 17.18, 17.22.

CZĘŚĆ II

1. Całkę typu

(I) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},\ \text{gdzie } k\in R,$$

obliczamy według wzoru

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C. \tag{1}$$

Słuszność tego wzoru wynika natychmiast z definicji funkcji pierwotnej.

PRZYKŁAD. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$.

2. Całkę typu

(II) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}},\ \text{gdzie } k\in R_+,$$

obliczamy według wzoru

$$\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}}=arc\sin\frac{x}{\sqrt{k}}+C. \tag{2}$$

Słuszność tego wzoru wynika z definicji funkcji pierwotnej.

PRZYKŁAD. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}=arc\sin\frac{x}{\sqrt{25}}+C=arc\sin\frac{x}{5}+C$.

3. Całkę typu

(III) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \text{gdzie } a,b,c\in R,$$

wyznaczamy w zależności od znaku współczynnika a przy x^2. Najpierw sprowadzamy trójmian kwadratowy, znajdujący w mianowniku pod pierwiastkiem, do postaci kanonicznej wzorem:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]. \tag{3}$$

Następnie wprowadzamy podstawienie:

$$x+\frac{b}{2a}=t\Rightarrow dx=dt. \tag{4}$$

I tak:

a) Jeżeli $a>0$, to wynik całki otrzymujemy według wzoru (1).

b) Jeżeli $a<0$, to wynik całki otrzymujemy według wzoru (2).

PRZYKŁAD. a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+9}\right| + C$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = arc\sin\frac{t}{\sqrt{9}} + C = arc\sin\frac{x+2}{3} + C .$$

4. Całkę typu

(IV) $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \text{ gdzie } M, N, a, b, c \in R ,$$

wyznaczamy przedstawiając ją w postaci sumy algebraicznej dwu całek

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = A_1\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + A_2\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} . \tag{5}$$

Dowodzi się, że rozkład (5) jest zawsze możliwy i jednoznaczny. W liczniku pierwszej całki mamy pochodną mianownika i wynikiem tej całki będzie $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, natomiast w druga całka jest całką typu (III), mianownik której sprowadzamy do postaci kanonicznej wzorem (3), a wynik jest uzależniony od znaku współczynnika a przy x^2. Rozkład jest zawsze możliwy i jednoznaczny. Niezależne współczynniki A_1, A_2 obliczamy dzieląc licznik $Mx+N$ przez pochodną mianownika ax^2+bx+c , tzn. $\dfrac{(Mx+N)\div(2ax+b)=A_1}{reszta=A_2}$.

Iloraz z dzielenia daje nam współczynnik A_1, natomiast reszta, która zostaje z dzielenia jest współczynnikiem A_2.

PRZYKŁAD. a)

$$\int \frac{(4x-5)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = A_1\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} + A_2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = 2\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} - 13\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+9} - 13\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right| + C = 2\sqrt{x^2+4x+9} - 13\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+5}\right| + C$$

b)

$$\int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = A_1\int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + A_2\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = -3\cdot 2\sqrt{5-4x-x^2} - 11\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$

$$= -6\sqrt{5-4x-x^2} - 11 arc\sin\frac{t}{\sqrt{9}} + C = -6\sqrt{5-4x-x^2} - 11\cdot arc\sin\frac{x+2}{3} + C$$

5. Całkę typu

(V) $$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}\,dx ,\ I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(k+x^2)}} \text{ gdzie } k \in R ,$$

noszą nazwę *całek stowarzyszonych,* ponieważ przy obliczeniu całki I_1 pojawia się całka I_2 i na odwrót. Aby znaleźć całki stowarzyszone typu (V), do całki I_1 stosujemy wzór na całkowanie przez części: Mamy wtedy:

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \left| \begin{matrix} f(x) = \sqrt{x^2+k}, & g'(x) = 1, \\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+k}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}, & g(x) = x \end{matrix} \right| = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} \tag{6}$$

Jeżeli całkę z prawej strony wzoru (6) przeniesiemy na lewą stronę , to otrzymamy:

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = x\sqrt{x^2+k}\ . \tag{7}$$

Równość (7) daje nam wzór na sumę szukanych całek stowarzyszonych I_1 i I_2. Biorąc różnicę szukanych całek otrzymujemy

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int\left(\sqrt{x^2+k} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\right)dx = \int \frac{\left(\sqrt{\left(x^2+k\right)^2} - x^2\right)dx}{\sqrt{x^2+k}} = . \tag{8}$$

$$= \int \frac{\left(x^2+k-x^2\right)dx}{\sqrt{x^2+k}} == k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}.$$

Ale zgodnie z wzorem (1) mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C\ .$$

Uwzględniając ten wzór (1) w prawej stronie (8) mamy:

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C\ . \tag{9}$$

Równość (7) daje nam wzór na różnice szukanych całek stowarzyszonych I_1 i I_2. Dodając i odejmując stronami (5) i (6) otrzymujemy

$$I_1 \equiv \int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C\,, \tag{10}$$

$$I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C\ . \tag{11}$$

W sposób zupełnie analogiczny wyznaczamy całki stowarzyszone

$$I_1 = \int \sqrt{k-x^2}\,dx\,,\ I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(k-x^2\right)}}\,,\ \text{gdzie}\ \ k \in R_+\ .$$

$$I_1 \equiv \int \sqrt{k-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2} + arc\sin\frac{x}{\sqrt{k}} + C\,, \tag{12}$$

$$I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C\ . \tag{13}$$

PRZYKŁAD.

a) $$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx = \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4} + \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C = ,$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{(x+1)^2+4} + \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C$$

b) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C\,,$$

c) $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + arc\sin\frac{x}{\sqrt{1}} + C == \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + arc\sin x + C\,,$$

d) $$I_2 \equiv \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{6}} + C\ .$$

e)

6. Całkę typu

(VI) $$I=\int\frac{W_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie W_n jest wielomianem stopnia $n\geq 1$ naturalne, wyznaczamy przedstawiając ją w postaci

$$\int\frac{W_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=W_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{12}$$

Dowodzi się, że rozkład (10) jest zawsze możliwy i jednoznaczny, tj. istnieje dla danego wielomianu W_n dokładnie jeden taki układ liczb rzeczywistych B oraz współczynników tego wielomianu, że dla x należących do dziedziny funkcji podcałkowej zachodzi rozkład (10). Niezależne współczynniki wielomianu W_{n-1} oraz B, występujące po prawej stronie obliczamy metodą współczynników nieoznaczonych.

PRZYKŁAD .

a) $$\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx=\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\sqrt{x^2+2x-1}+B\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx. \tag{*}$$

Teraz dane wyrażenie różniczkujemy obustronnie. Pochodna z całki daje nam samo wyrażenie podpierwiastkowe, natomiast do pierwszego wyrażenia po znaku równości stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)'\sqrt{x^2+2x-1}+\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}\right)'+B\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\left(2A_2x+A_1\right)\sqrt{x^2+2x-1}+\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-1}}+B\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}};$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\left(2A_2x+A_1\right)\sqrt{x^2+2x-1}+\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x-1}}+B\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}};$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\left(2A_2x+A_1\right)\sqrt{x^2+2x-1}+\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}+B\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}.$$

Teraz całość mnożymy przez $\sqrt{x^2+2x-1}$ w celu pozbycia się mianownika

$$x^3+2x^2+x-1=\left(2A_2x+A_1\right)\left(x^2+2x-1\right)+\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)(x+1)+B.$$

Następnie przemnażamy wszystko i grupujemy współczynniki przy x do tej samej potęgi

$$x^3+2x^2+x-1=3A_2x^3+\left(5A_2+2A_1\right)x^2+\left(-2A_2+3A_1+A_0\right)x+\left(-A_1+A_0+B\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3A_2=1\Rightarrow A_2=\dfrac{1}{3}\\ 5A_2+2A_1=2\\ -2A_2+3A_1+A_0=1\\ -A_1+A_0+B=-1\end{cases}$$

Z układu wyznaczamy współczynniki i podstawiamy do wyrażenia (*)

$$A_2=\frac{1}{3};\ \ A_1=\frac{1}{6};\ \ A_0=\frac{7}{6};\ \ B=-2;$$

$$\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx.$$

W ostatniej całce mianownik przedstawiamy w postaci kanonicznej:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-2}}dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-2}}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t \big|(\ )' \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-2}}dt = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+C$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|+C.$$

c) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+4x+8}+D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+4x+8}+\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}}$

Teraz dane wyrażenie różniczkujemy obustronnie. Pochodna z całki daje nam samo wyrażenie podpierwiastkowe, natomiast do pierwszego wyrażenia po znaku równości stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+8}} = (Ax+B)'\sqrt{x^2+4x+8}+(Ax+B)\left(\sqrt{x^2+4x+8}\right)'+D\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+8}} = A\sqrt{x^2+4x+8}+(Ax+B)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+8}}+D\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+8}} = A\sqrt{x^2+4x+8}+(Ax+B)\frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+8}}+D\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+8}} = A\sqrt{x^2+4x+8}+(Ax+B)\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}+D\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

Teraz całość mnożymy przez $\sqrt{x^2+4x+8}$ w celu pozbycia się mianownika:

$$x^2 = A\left(\sqrt{x^2+4x+8}\right)^2+(Ax+B)(x+2)+D$$

$$x^2 = A(x^2+4x+8)+(Ax+B)(x+2)+D$$

Następnie przemnażamy wszystko i grupujemy współczynniki przy x do tej samej potęgi:

$$x^2 = 2Ax^2+(6A+B)x+(8A+2B+D).$$

Przyrównujemy współczynniki przy x do tej samej potęgi po obu stronach równości i wyznaczamy te współczynniki:

$$\begin{cases} 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \\ 6A+B=0 \Rightarrow 6\cdot\frac{1}{2}+B=0 \Rightarrow 3+B=0 \Rightarrow B=-3 \\ 8A+2B+D=0 \Rightarrow 8\cdot\frac{1}{2}+2\cdot(-3)+D=0 \Rightarrow 4-6+D=0 \Rightarrow D=-2 \end{cases}$$

Te współczynniki podstawiamy do pierwszego wyrażenia:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \left(\frac{1}{2}x-3\right)\sqrt{x^2+4x+8}-2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x-3\right)\sqrt{x^2+4x+8}-2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x-3\right)\sqrt{x^2+4x+8}-2\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+2}\right|+C$$

Tutaj jest rozwiązanie ostatniej całki:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = \left| \begin{matrix} x+2=t|(') \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} = \ = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+2}\right| =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+2}\right|+C$$

7. Całkę typu

(VII) $$I=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ n\in N,$$

wyznaczamy przez sprowadzenie jej do całki typu (III) lub do całki typu (II). Osiągamy to stosując podstawienie $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

PRZYKŁAD .

a) $$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t\\ x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=\sqrt{t^2+1}-\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C.$$

b)

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t\\ x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t+t^2}{t^2}}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t+t^2}{t^2}}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{t}}=$$

$$-\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}=\left|\begin{matrix}t+\frac{1}{2}=u\left|(\ )'\right.\\ dt=du\end{matrix}\right|=-\int\frac{du}{\sqrt{\frac{3}{4}+u^2}}=$$

$$-\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2}\right|+C$$

c)

$$I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x+2}=t\\ x+2=\frac{1}{t}\\ x=\frac{1}{t}-2\left|(\ )'\right.\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{4-\left(\frac{1}{t}-2\right)^2}}=\int\frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}}}=\int\frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{-1+4t}{t^2}}}=\int\frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{-1+4t}{t^2}}}=$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{\sqrt{-1+4t}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{-1+4t}}=\left|\begin{array}{c} -1+4t=u\Big|(\ )' \\ 4dt=du \\ dt=\frac{1}{4}du \end{array}\right|=-\int \frac{\frac{1}{4}du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{u}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{-1+4t}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{-1+4\cdot \frac{1}{x+2}}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{x+2}-1}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-x-2}{x+2}}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}+C$$

d)

$$I=\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{10x-x^2}}=\left|\begin{array}{c} \frac{1}{x-1}=t \\ x-1=\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{t}+1\Big|(\ )' \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right|=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{10\left(\frac{1}{t}+1\right)-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{10+10t}{t}-\frac{1+t+t^2}{t^2}}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{10t+10t^2-1-t-t^2}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{9t^2+9t-1}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{\frac{\sqrt{9t^2+9t-1}}{t}}=-\int \frac{tdt}{\sqrt{9t^2+9t-1}}$$

Otrzymana całka jest całką funkcji niewymiernej z wyrażeniem liniowym w liczniku:

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{9t^2+9t-1}}=A_1\int \frac{18t+9}{\sqrt{9t^2+9t-1}}dt+A_2\int \frac{dt}{\sqrt{9t^2+9t-1}}=\frac{1}{18}\cdot 2\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-5}{36}\right]}}=$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{3\cdot \sqrt{\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-5}{36}\right]}}=\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-5}{36}\right]}}=\left|\begin{array}{c} t+\frac{1}{2}=u\Big|(\ )' \\ dt=du \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{u^2-\frac{5}{36}}}=\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{36}}\right|+C$$

To są rachunki pomocnicze:

$$t\div(18t+9)=\frac{1}{18}=A_2$$

$$\begin{array}{l} -t-\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2}=A_2 \end{array}$$

$$9t^2+9t-1=9\left[\left(t+\frac{9}{2\cdot 9}\right)^2+\frac{-45}{4\cdot 9^2}\right]=9\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-5}{4\cdot 9}\right]=9\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-5}{36}\right]$$

$$\Delta=81-36=45$$

Teraz do wyniku końcowego $\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{36}}\right|+C$

podstawiamy zamiast $t=\frac{1}{x-1}$, to co było na początku zadania:

$$\frac{1}{9}\sqrt{9t^2+9t-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{36}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{9\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+9\frac{1}{x-1}-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{36}}\right|+C$$

8. Całkę typu

(VIII) $$I=\int\frac{W_n(x)dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},\ k,n\in N \text{ i } k\geq n+1,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, wyznaczamy przez sprowadzenie jej do całki typu (VI). Osiągamy to stosując podstawienie $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

PRZYKŁAD .

Zadania do przerobienia: 17.53, 17.54, 17.55, 17.58, 17.60, 17.65, 17.66, 17.69, 17.72, 17.76, 17.78, 17.82, 17.8317.86, 17.103, 17.108, 17.119,17.120.